

Министерство образования Кировской области
Кировское областное государственное профессиональное образовательное
бюджетное учреждение
«Кировский многопрофильный техникум»

Методические рекомендации

ОУП.04. Математика

(Предметная область «Математика и информатика»)

общеобразовательного цикла

основной профессиональной образовательной программы
среднего профессионального образования
программы подготовки квалифицированных рабочих, служащих по профессии

35.01.28 Мастер столярного и мебельного производства

г. Киров
2024 г.

Рассмотрено и одобрено
предметной (цикловой)
комиссией преподавателей
общеобразовательных дисциплин
Протокол №1 от «26» 08 2024 г.
Председатель ПЦК

/ /

Согласовано
заместитель директора
по учебно-методической
работе
_____/ Гиберт Е.В. /
«26» 08 2024 г.

Автор-составитель
_____/ Маковеева Е.Н. /
преподаватель КОГПОБУ «Кировский
многопрофильный техникум».

«26» 08 2024 г.

Дата актуализации	Результаты актуализации	Подпись разработчика

Содержание

1. Пояснительная записка
2. Задания для самостоятельной работы обучающихся
 - 2.1. Самостоятельная работа № 1.
 - 2.2. Самостоятельная работа № 2.
 - 2.3. Самостоятельная работа № 3.
 - 2.4. Самостоятельная работа № 4.
 - 2.5. Самостоятельная работа № 5.
 - 2.6. Самостоятельная работа № 6.
 - 2.7. Самостоятельная работа № 7.
 - 2.8. Самостоятельная работа № 8.
 - 2.9. Самостоятельная работа № 9.
 - 2.10. Самостоятельная работа № 10.
 - 2.11. Самостоятельная работа № 11.
 - 2.12. Самостоятельная работа № 12.
 - 2.13. Самостоятельная работа № 13.
 - 2.14. Самостоятельная работа № 14.
 - 2.15. Самостоятельная работа № 15.
 - 2.16. Самостоятельная работа № 16.
 - 2.17. Самостоятельная работа № 17.
 - 2.18. Самостоятельная работа № 18.
 - 2.19. Самостоятельная работа № 19.
 - 2.20. Самостоятельная работа № 20.
 - 2.21. Самостоятельная работа № 21.
 - 2.22. Самостоятельная работа № 22.
 - 2.23. Самостоятельная работа № 23.
 - 2.24. Самостоятельная работа № 24.
 - 2.25. Самостоятельная работа № 25.
 - 2.26. Самостоятельная работа № 26.
 - 2.27. Самостоятельная работа № 27.
 - 2.28. Самостоятельная работа № 28.
 - 2.29. Самостоятельная работа № 29.
 - 2.30. Самостоятельная работа № 30.
 - 2.31. Самостоятельная работа № 31.
 - 2.32. Самостоятельная работа № 32.
 - 2.33. Самостоятельная работа № 33.
 - 2.34. Самостоятельная работа № 34.
 - 2.35. Самостоятельная работа № 35.
 - 2.36. Самостоятельная работа № 36.
 - 2.37. Самостоятельная работа № 37.
 - 2.38. Самостоятельная работа № 38.
3. Список рекомендуемой литературы (включая ссылки на Интернет-ресурсы) (по всему курсу)
4. Приложения. Рекомендации по подготовке письменных работ.

1. Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся составлены на основе рабочей программы по дисциплине математика, Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по профессии 35.01.28 Мастер столярного и мебельного производства, а также в соответствии с методическими рекомендациями по планированию и организации самостоятельной работы обучающихся КОГПОБУ «Кировский многопрофильный техникум».

Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений и навыков.

Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Виды учебной работы	Количество часов
Максимальная учебная нагрузка (всего)	481
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	325
в том числе:	
лабораторно - практические занятия	-
Самостоятельная работа	156
Итоговая аттестация в форме	экзамена

В результате изучения дисциплины обучающийся должен **уметь:**

У1 - выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения;

У2 - находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

У3 - выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

У4 - вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;

- У5** - определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- У6** - строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- У7** - использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;
- У8** - находить производные элементарных функций;
- У9** - использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- У10** - применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- У11** - вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;
- У12** - решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- У13** - использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- У14** - изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- У15** - составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.
- У16** - решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
- У17** - вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;
- У18** - распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- У19** - описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, *аргументировать свои суждения об этом расположении*;
- У20** - анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- У21** - изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- У22** – *строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды*;
- У23** - решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- У24** - использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- У25** - проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- У26** - использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

знать:

- З1** - значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

32 - значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;

33 - универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;

34 – вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

Формой аттестации по учебной дисциплине является экзамен.

Результаты самостоятельной работы обучающихся контролируются преподавателем и учитываются при аттестации обучающегося (письменный экзамен).

2. Задания для самостоятельной работы обучающихся

2.1. Самостоятельная работа №1 (4ч)

Тема: Вычисления с дробями.

Цель: закрепление умений и навыков выполнения действий с обыкновенными и десятичными дробями.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения (повторения) теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения заданий.

Основное свойство дроби: Значение дроби не меняется, если умножить её числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля.

Пример № 1 $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{35}{63}$; $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

Сокращение дроби: Значение дроби не меняется, если разделить её числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля. Это преобразование называется сокращением дроби.

$$\frac{18}{27} = \frac{2 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \frac{2}{3}; \quad \frac{21}{28} = \frac{3 \cdot \cancel{7}}{4 \cdot \cancel{7}} = \frac{3}{4}.$$

Пример №2

Сравнение дробей: Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та больше, числитель которой больше.

Пример №3 $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}, \quad \frac{5}{9} < \frac{7}{9},$

Для сравнения дробей, у которых знаменатели различны, необходимо привести их к общему знаменателю.

Пример № 4 Сравнить две дроби: $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{10}$

$$\frac{2}{3} = \frac{20}{30}; \quad \frac{7}{10} = \frac{21}{30}, \text{ и тогда } \frac{2}{3} < \frac{7}{10}, \text{ т.к. } \frac{20}{30} < \frac{21}{30}$$

Сложение и вычитание дробей. Если знаменатели дробей одинаковы, то для того, чтобы сложить дроби, надо сложить их числители, а для того, чтобы вычесть дроби, надо вычесть их числители (в том же порядке). Полученная сумма или разность будет числителем результата; знаменатель останется тем же. Если знаменатели дробей различны, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю. При сложении смешанных чисел их целые и дробные части складываются отдельно. При вычитании смешанных чисел мы рекомендуем сначала преобразовать их к виду неправильных дробей, затем вычесть из одной другую, а после этого вновь привести результат, если требуется, к виду смешанного числа.

Пример №5: $7\frac{1}{4} - 4\frac{2}{3} = \frac{29}{4} - \frac{14}{3} = \frac{87}{12} - \frac{56}{12} = \frac{31}{12} = 2\frac{7}{12}$

Умножение дробей: Умножить некоторое число на дробь означает умножить его на числитель и разделить произведение на знаменатель. Следовательно, мы имеем общее правило умножения дробей: для перемножения дробей необходимо перемножить отдельно их числители и знаменатели и разделить первое произведение на второе.

Пример №6: $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{10}{63}$

Деление дробей: Для того, чтобы разделить некоторое число на дробь, необходимо умножить это число на обратную дробь. Это правило вытекает из определения деления

Пример №7 $\frac{3}{5} : \frac{12}{25} = \frac{3 \cdot 25}{5 \cdot 12} = \frac{5}{14}$

Сложение и вычитание десятичных дробей:

Чтобы найти сумму или разность двух чисел, записанных в десятичной форме, надо выполнить три шага:

- 1) Записать числа в столбик таким образом, чтобы соответствующие разряды совпадали. Главный ориентир — десятичные запятые. Они не являются отдельным разрядом, но должны стоять на одной вертикали;
- 2) Сложить или вычесть полученные дроби столбиком — подобно тому, как складываем и вычитаем обычные числа. Десятичную запятую ставим между соответствующими разрядами;
- 3) Полученное число и будет ответом.

Пример №8 . Найдите значение выражений: а) $8,125 + 17,4$; б) $3,5 + 121,048$.

Решение:
$$\begin{array}{r} + 8,125 \\ + 17,4 \\ \hline 25,525 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 3,5 \\ + 121,048 \\ \hline 124,548 \end{array}$$

Умножение и деление десятичных дробей.

Для того, чтобы найти произведение двух десятичных дробей, нужно их умножить столбиком как целые числа, не принимая во внимание запятые. После этого, в каждом сомножителе нужно посчитать количество знаков после запятой и сложить эти значения ($N=a+b$). Далее вы в полученном результате добавляете запятую, отстоящую на N позиций справа.

$$\begin{array}{r} \times 2,436 \\ 1,93 \\ \hline 7308 \\ + 21924 \\ + 2436 \\ \hline 4,70148 \end{array}$$

Пример №9

При делении десятичной дроби на натуральное число сначала делим без запятой, а потом в частном отделяем запятой столько знаков, сколько было отделено в делимом.

При делении на десятичную дробь, сначала переносим запятую в делимом и делителе вправо на столько знаков, сколько их после запятой в делителе. А затем выполняем деление на натуральное число.

Пример №10 а) $123,96 : 0,3 = 1239,6 : 3 = 413,2$; б) $126 : 0,03 = 12600 : 3 = 4200$

Задания по теме

	<u>1 вариант</u>	<u>2 вариант</u>	Кол-во баллов
№1. Сократите дробь	А) $\frac{14}{126}$; Б) $\frac{28}{91}$; В) $\frac{45}{60}$	А) $\frac{80}{88}$; Б) $\frac{14}{16}$; В) $\frac{112}{136}$	1 1 1
№2. Сравните дроби	А) $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{19}$; Б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{17}{20}$	А) $\frac{2}{6}$ и $\frac{14}{19}$; Б) $\frac{8}{9}$ и $\frac{12}{15}$	2 2
№3. Вычислите.	А) $\frac{19}{20} - \frac{10}{17}$; Б) $\frac{12}{18} + \frac{9}{15}$; В) $8\frac{11}{14} + \frac{4}{8}$ Г) $7\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}$	А) $\frac{8}{13} - \frac{2}{8}$ Б) $\frac{15}{18} + \frac{7}{9}$ В) $5\frac{1}{13} + 8\frac{7}{14}$ Г) $7\frac{7}{11} - 5\frac{2}{3}$	2 2 2 2
№4. Вычислите.	А) $\frac{4}{8} \cdot \frac{2}{9}$ Б) $6\frac{10}{19} \cdot 5\frac{6}{10}$ В) $\frac{1}{12} : \frac{3}{4}$ Г) $5\frac{2}{5} : 3\frac{5}{11}$	А) $\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{7}$ Б) $6\frac{2}{14} \cdot 7\frac{12}{14}$ В) $\frac{6}{20} : \frac{1}{5}$ Г) $10\frac{1}{6} : 7\frac{1}{2}$	2 2 2 2
№ 5. Вычислите	$6\frac{1}{4} \cdot 8 - 3\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} \cdot 4\frac{7}{12}$	$\left(5\frac{3}{8} + 18\frac{1}{2} - 7\frac{5}{24}\right) : 16\frac{2}{3}$	4

№6. Найдите сумму	1) $52 + 0,084$ 2) $25,49 + 0,375$	1) $0,096 + 63$ 2) $0,598 + 32,24$	1 1
№ 7. Выполните вычитание:	1) $2,56 - 0,468$ 2) $8 - 0,9328$	1) $7,82 - 0,746$ 2) $6 - 0,8736$	1 1
№ 8. Вычислите.	1) $0,28 \cdot 12,5 + 3,51 : 3,9$; 2) $0,0108 \cdot 1600,5 - 1,47$	1) $6,3 \cdot 1,08 - 6,4 : 25,6$; 2) $132,5 \cdot 0,0034 + 0,0425 : 2,5$;	3 3

№9 1 вариант Вычислите: (4б.)

$$\frac{(0,5:1,25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}) * 3}{(1,5 + \frac{1}{4}):18\frac{1}{3}}$$

№ 9 2 вариант Вычислите: (4б.)

$$\frac{2\frac{3}{4}:1,1}{25 - 0,4 * 3\frac{1}{3}} : \frac{5}{7} - \frac{(2\frac{1}{6} + 4,5) * 0,375}{2,75 - 1\frac{1}{2}}$$

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
21 – 28	3
29 - 36	4
37 – 41	5

Рекомендуемая литература:

1. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика 5; учебник для общеобразовательных школ, М.: Мнемозина, 2012
2. Совайленко В.К. Система обучения математики в 5 – 6 классах: Кн.для учителя; Из опыта работы, М. Просвещение, 1991
3. <http://www.sosh-13.ru/wp-content/uploads/2013/10/Метод-разработка-для-5-класса-Правила-за-курс-5-класса.pdf>
4. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Как из неправильной дроби выделить целую часть?
2. В чем состоит основное свойство дроби?
3. Какая дробь называется несократимой?
4. По какому правилу выполняется вычитание дробей с разными знаменателями?
5. По какому правилу выполняется деление десятичных дробей?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется при условии правильного, осознанного выполнения всего объема работы, указанного в задании самостоятельной работы №1, при условии правильного решения всех практических задач, грамотного и аккуратно оформленного решения.

Оценка «хорошо» - отчет, в основном, удовлетворяет выше названным требованиям, однако допущены 2-3 несущественных ошибки.

Оценка «удовлетворительно» - ставится в том случае, когда обучающийся показывает неглубокое понимание материала по теме работы, допущены 4 ошибки и отчет оформлен неаккуратно, без учета требований к оформлению.

Оценка «неудовлетворительно» - в отчете допущены существенные ошибки, не все задания выполнены, имеются серьезные отклонения от требований к оформлению. В случае получения данной оценки студент обязан выполнить работу заново.

2.2. Самостоятельная работа №2 (4ч)

Тема: Уравнения и неравенства

Цель: закрепление умений и навыков решения линейных, квадратичных уравнений и неравенств.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения и контрольных вопросов. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Линейные уравнения. Уравнение вида $ax=b$ - линейное, где a и b - числа, а x - неизвестное. Для того, чтобы найти решение линейного уравнения, необходимо

разделить обе части уравнения на коэффициент a - числовой коэффициент возле переменной x .

$$x = \frac{b}{a}$$

Линейное уравнение может быть задано неявно. В этом случае необходимо раскрыть скобки, умножив многочлен на одночлен, применить действия над уравнениями, в результате которых получим уравнение равносильное данному, привести подобные.

Если изначально задано уравнение, содержащее переменную в знаменателе, то перед решением необходимо указать область определения, исключить из ответа корни, при которых выражение не имеет смысла.

Пример 1

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \\ x &= \frac{6}{3} = 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Пример 2

$$\begin{aligned} 3x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{3} \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Пример 3

$$\begin{aligned} 8(x-1) + 2x &= 2(4-2x) \\ 8x-8+2x &= 8-4x \\ 8x+2x+4x &= 8+8 \\ 14x &= 16 \\ x &= \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

Пример 4

$$\begin{aligned} \frac{5x+15}{x+4} &= 4 \\ D: x &\neq -4 \\ \frac{5x+15}{x+4} \cdot (x+4) &= 4 \cdot (x+4) \\ 5x+15 &= 4x+16 \\ x &= -1 \\ \text{Ответ: } x &= -1 \end{aligned}$$

Пример 5

$$\begin{aligned} \frac{5x+15}{x+3} &= 4 \\ D: x &\neq -3 \\ \frac{5x+15}{x+3} \cdot (x+3) &= 4 \cdot (x+3) \\ 5x+15 &= 4x+12 \\ x &= -3 \\ \text{Ответ: нет корней} \end{aligned}$$

Квадратное уравнение — алгебраическое уравнение общего вида

$ax^2 + bx + c = 0$, где x — свободная переменная, a , b , c — коэффициенты, причём $a \neq 0$

Выражение $ax^2 + bx + c$ называют *квадратным трёхчленом*.

Корень — это значение переменной x , обращающее *квадратный трёхчлен* в ноль, а *квадратное уравнение* в верное равенство.

Элементы квадратного уравнения имеют собственные названия:

- a называют *первым* или *старшим* коэффициентом,
- b называют *вторым* или *коэффициентом при x* ,
- c называют *свободным членом*.

Приведённым называют квадратное уравнение, в котором старший коэффициент равен единице. Такое уравнение может быть получено делением всего выражения на старший коэффициент a : $x^2 + px + g = 0$, $p = \frac{b}{a}$, $g = \frac{c}{a}$

Полным называют такое квадратное уравнение, все коэффициенты которого отличны от нуля.

Неполным называется такое квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов кроме старшего (либо второй коэффициент, либо свободный член) равен нулю.

Корни квадратного уравнения на множестве действительных чисел

1 способ. Общая формула для вычисления корней

Для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, в общем случае следует пользоваться приводимым ниже алгоритмом:

Вычислить значение дискриминанта квадратного уравнения: $D = b^2 - 4ac$

Условие	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Число действительных корней	корней два	корень один (в некоторых контекстах говорят также о двух равных или совпадающих)	делают вывод о том, что корней на множестве действительных чисел нет.
Формула	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$	-

Пример № 6 Решите уравнения

$$1) x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow a = 1; b = -2; c = -3;$$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16. D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1; x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 3$$

$$2) x^2 + 12x + 36 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 12; c = 36;$$

$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0. D = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет один корень. Можно использовать любую формулу. Например, первую:

$$x = \frac{-12 + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -6$$

2 способ. Решение неполных квадратных уравнений

Возможны три ситуации.

b=0, c=0	b=0; c≠0	b≠0; c=0
$ax^2 = 0;$ $x^2 = 0; x = 0.$	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c; x^2 = -\frac{c}{a}; x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$ Если $-\frac{c}{a} > 0;$, то уравнение имеет два действительных корня, если $-\frac{c}{a} = 0;$, то $x = 0.$, а если $-\frac{c}{a} < 0;$, то уравнение не имеет действительных корней.	$ax^2 + bx = 0;$ $x(ax + b) = 0; x = 0$ или $ax + b = 0; x = -\frac{b}{a}.$ Уравнение имеет два действительных корня

Пример № 7 Решить неполные квадратные уравнения:

$$1) x^2 - 7x = 0$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x(x - 7) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 7.$$

$$2) 5x^2 + 30 = 0$$

$$5x^2 = -30$$

$$x^2 = -6$$

Корней нет, т.к. квадрат не может быть равен отрицательному числу

$$1) 4x^2 - 9 = 0$$

$$4x^2 = 9$$

$$x^2 = 9/4$$

$$x_1 = 3/2 = 1,5;$$

$$x_2 = -1,5.$$

3 способ. Теорема Виета

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + g = 0$, равна коэффициенту p со знаком «минус», а произведение корней равно свободному члену g .
 $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = g$

В общем случае, то есть для не приведённого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Используя эту теорему, можно решать некоторые квадратные уравнения устно.

Решение линейных неравенств

Линейным неравенством с одной переменной называется неравенство вида $ax > 0, ax \geq 0, ax < 0, ax \leq 0$

Основные свойства неравенств

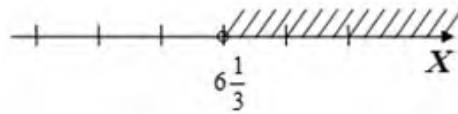
- 1) Если $a > b$, то $b < a$
- 2) Свойство транзитивности. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$
- 3) Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство, т.е. если $a > b$, то $a + c > b + c$
- 4) Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получится верное неравенство, т.е. если $a + b > c$, то $a - c > -b$
- 5) Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство. Например, если $a > b$, то $5a > 5b$
- 6) Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и **изменить знак неравенства** на противоположный, то получится верное неравенство. Например, если $a > b$, то $-3a < -3b$
- 7) Аналогично правилам 5) и 6) действуют правила для деления на одно и то же число. Если $a > b$, то $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ $-\frac{a}{5} < -\frac{b}{5}$

Пример №8 Решите неравенства

Неравенства можно преобразовать в линейное, используя основные свойства неравенств.

а) $3x - 2 > 17$

$$3x > 17 + 2$$



$$3x > 19$$

$$x > \frac{19}{3}$$

$$x > 6\frac{1}{3} \quad \text{Ответ: } x \in (6\frac{1}{3}; +\infty)$$

б) $7 - 5x \geq 37$

$$-5x \geq 37 - 7$$

$$-5x \geq 30$$

$$x \leq 30 : (-5)$$

$$x \leq -6 \quad \text{Ответ: } x \in (-\infty; -6]$$

Пример №9 Решите неравенство

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3(2-x)}{10} + \frac{7x+1}{4} \leq \frac{x+11}{3} + \frac{13+16x}{20}.$$

Решение:

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3(2-x)}{10} + \frac{7x+1}{4} \leq \frac{x+11}{3} + \frac{13+16x}{20} \quad | \cdot 60;$$

$$30(x-2) - 18(2-x) + 15(7x+1) \leq 20(x+11) + 3(13+16x);$$

$$30x - 60 - 36x + 18x + 105x + 15 \leq 20x + 220 + 39 + 48x;$$

$$30x + 18x + 105x - 20x - 48x \leq 220 + 39 + 60 + 36 - 15;$$

$$85x \leq 340;$$

$$x \leq 4.$$

Ответ: $(-\infty; 4]$.

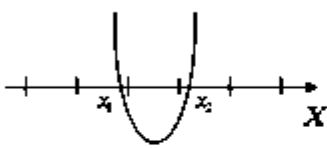
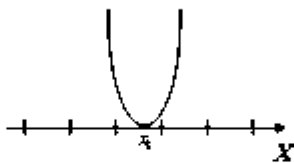
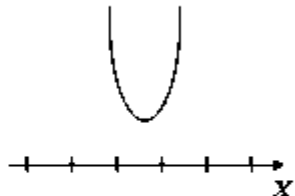
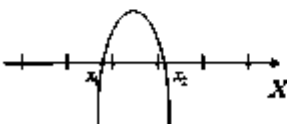
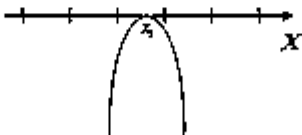
Решение квадратных неравенств

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ где

x - переменная, a, b, c - числа, $a \neq 0$, называется квадратным.

При решении квадратного неравенства необходимо найти корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Для этого необходимо найти дискриминант данного квадратного уравнения. Можно получить 3 случая: 1) $D=0$, квадратное уравнение имеет один корень; 2) $D>0$ квадратное уравнение имеет два корня; 3) $D<0$ квадратное уравнение не имеет корней.

В зависимости от полученных корней и знака коэффициента a возможно одно из шести расположений графика функции $y = ax^2 + bx + c = 0$

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ больше нуля, то это числовой промежуток находится там, где парабола лежит выше оси OX .

Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ меньше нуля, то это числовой промежуток, где парабола лежит ниже оси OX .

Если квадратное неравенство нестрогое, то корни входят в числовой промежуток, если строгое - не входят.

Такой метод решения квадратного неравенства называется графическим.

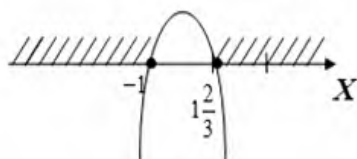
Пример № Решите неравенство: $-3x^2 + 2x + 5 \leq 0$

$$-3x^2 + 2x + 5 \leq 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 64$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = -1 \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

изображаем параболу, отмечаем промежутки, где она ниже оси OX , так как " $\leq$ "



Ответ: $(-\infty; 1] \cup [1\frac{2}{3}; +\infty)$

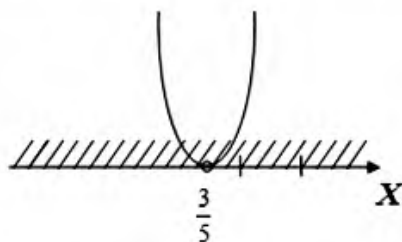
Пример № Решите неравенство: $25x^2 - 30x + 9 > 0$

$$25x^2 - 30x + 9 > 0$$

$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{30}{2 \cdot (25)} = \frac{3}{5}$$

изображаем параболу, отмечаем промежутки, где она выше OX , так как " $>$ "



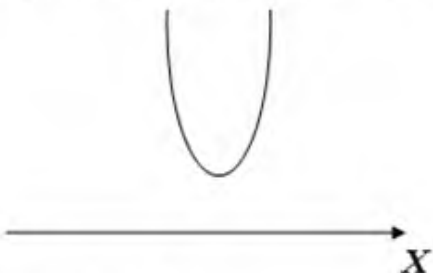
Ответ: $(-\infty; \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{5}; +\infty)$

Пример № Решите неравенство: $2x^2 + 4x + 3 < 0$

$$2x^2 + 4x + 3 < 0$$

$$D = (4)^2 - 24 = -8 < 0$$

изображаем параболу, отмечаем промежутки, где она ниже OX , так как " $<$ "



Ответ: нет решений

Задания по теме

Вариант 1	Вариант 2
1) Решите уравнения:	
2) Какие из чисел – 3, 0, 4, 11 являются решениями неравенства:	
$5x - 7 > 3$	$10 - 2x > 8$
3) Решите неравенства:	
а) $7x < 49$; б) $4x - 7 > 13 - x$; в) $25 - x > 2 - 3(x - 6)$; г) $2(x - 1) \leq 5x - 4(2x + 1)$.	а) $6x > 42$; б) $5 - 5x > 11 - 7x$; в) $5(x + 4) < 2(4x - 5)$; г) $4(x - 1) - (9x - 5) \geq 6$.
д) $2x^2 - 13x + 6 < 0$	д) $2x^2 - x - 15 > 0$
е) $x^2 - 9 > 0$	е) $x^2 - 16 < 0$
ж) $3x^2 - 6x + 32 > 0$	ж) $x^2 + 12x + 80 < 0$
з) $(x + 8)(x - 4) > 0$	з) $(x + 11)(x - 9) < 0$
3) Найдите область определения функции	
$y = \sqrt{x - x^2}$	$y = \sqrt{3x - 2x^2}$

Рекомендуемая литература:

1. Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений под редакцией Теляковского С.А, М., Просвещение , 2012.
2. Алгебра. Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений под редакцией Теляковского С.А, М., Просвещение , 2012.
3. Алгебра. Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений под редакцией Теляковского С.А, М., Просвещение , 2012
4. http://www.berdov.com/docs/equation/quadratic_equations/ [электронный ресурс].
5. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Назовите свойства числовых неравенств.
2. Как зависит число корней квадратного уравнения от значения дискриминанта.

3. Формула корней квадратного уравнения.
4. Как определить направление ветвей параболы?
5. Сформулируйте теорему Виета.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется при условии правильного, осознанного выполнения всего объёма работы, указанного в задании самостоятельной работы №2, при условии правильного решения всех практических задач, грамотного и аккуратно оформленного решения.

Оценка «хорошо» - отчёт, в основном, удовлетворяет выше названным требованиям, однако допущены 2-3 несущественных ошибки.

Оценка «удовлетворительно» - ставится в том случае, когда обучающийся показывает неглубокое понимание материала по теме работы, допущены 4 ошибки и отчёт оформлен неаккуратно, без учёта требований к оформлению.

Оценка «неудовлетворительно» - в отчёте допущены существенные ошибки, не все задания выполнены, имеются серьёзные отклонения от требований к оформлению. В случае получения данной оценки студент обязан выполнить работу заново.

2.3. Самостоятельная работа №3 (4ч)

Тема: Понятие о числе.

Цель: Совершенствование навыков работы с текстовой информацией, комплексно использовать источники информации.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы, прочитайте рекомендуемую литературу, требования к написанию и оформлению реферата (см приложения).

Число́ — основное понятие математики, используемое для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей. Письменными знаками для обозначения чисел служат цифры, а также символы математических операций. Возникнув ещё в первобытном обществе из потребностей счёта, понятие числа с развитием науки значительно расширилось.

Основные числовые множества:

- **Натуральные числа**, получаемые при естественном счёте; множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$. То есть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (иногда к множеству натуральных чисел также относят ноль, то есть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$). Сложение и умножение натуральных чисел коммутативны и ассоциативны, а умножение натуральных чисел дистрибутивно относительно сложения и вычитания.
- Важным подмножеством натуральных чисел являются **простые числа** $\mathbb{P}$. Простое число — это натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя: единицу и самого себя. Все остальные натуральные числа, кроме единицы, называются составными. Ряд простых чисел начинается так: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...¹ Любое натуральное число, большее единицы, представимо в виде произведения степеней простых чисел, причём единственным способом с точностью до порядка следования сомножителей. Например, $121968 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$.
- **Целые числа**, получаемые объединением натуральных чисел с множеством чисел противоположных натуральным и нулём, обозначаются $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Любое целое число можно представить как разность двух натуральных
- **Рациональные числа** — числа, представимые в виде дроби m/n ($n \neq 0$), где m — целое число, а n — натуральное число. Для обозначения рациональных чисел используется знак $\mathbb{Q}$ (от англ. *quotient*).
- **Действительные числа** представляют собой расширение множества рациональных чисел. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$. Его можно рассматривать как пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ при помощи нормы, являющейся обычной абсолютной величиной. Кроме рациональных чисел, $\mathbb{R}$ включает множество иррациональных чисел $\mathbb{I}$, не представимых в виде отношения целых.
- **Комплексные числа** $\mathbb{C}$, являющиеся расширением множества действительных чисел. Они могут быть записаны в виде $z = x + iy$, где i — т. н. мнимая единица, для которой выполняется равенство $i^2 = -1$. Комплексные числа используются при решении задач электротехники, гидродинамики, картографии, квантовой механики, теории колебаний, теории хаоса, теории упругости и многих других. Комплексные числа подразделяются на алгебраические и трансцендентные. При этом каждое действительное трансцендентное является иррациональным, а каждое рациональное числ — действительным алгебраическим. Более общими (но всё ещё счётными) классами чисел, чем алгебраические, являются периоды, вычислимые и арифметические числа (где каждый последующий класс шире, чем предыдущий).

Для перечисленных множеств чисел справедливо следующее выражение:
 $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Задание по теме:

Подготовьте реферат на одну из тем: «История развития счета», «История возникновения чисел», «Как возникли цифры», «Математика в современном мире».

Реферат – это самостоятельная исследовательская работа, в которой автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее. Содержание реферата должно быть логичным; изложение материала носит проблемно-тематический характер.

Требования к реферату

Автор реферата должен продемонстрировать достижение им уровня мировоззренческой, общекультурной компетенции, т.е. продемонстрировать знания о реальном мире, о существующих в нем связях и зависимостях, проблемах, о ведущих мировоззренческих теориях, умении проявлять оценочные знания, изучать теоретические работы, использовать различные методы исследования, применять различные приемы творческой деятельности.

1. Необходимо правильно сформулировать тему, отобрать по ней необходимый материал.
2. Использовать только тот материал, который отражает сущность темы.
3. Во введении к реферату необходимо обосновать выбор темы.
4. После цитаты необходимо делать ссылку на автора, например [№ произведения по списку, стр.].
5. Изложение должно быть последовательным. Недопустимы нечеткие формулировки, речевые и орфографические ошибки.
6. Оформление реферата (в том числе титульный лист, литература) должно быть грамотным.
7. Список литературы оформляется с указанием автора, названия источника, места издания, года издания, названия издательства, использованных страниц.

Рекомендуемая литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10 кл. Базовый уровень: учеб. для общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2008.

2. Блюмин С.Л. Развитие понятия о числе. Некоторые современные представления. 2005.
3. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов / Н.В. Богомолов. П.И. Самойленко, -3-е изд., стереотип. -М.: Дрофа, 2005. -395, (5)с.: ил.
4. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для техникумов. -3-е изд., перераб. И доп. -М. : Высш.шк., 1990. -445 с.: ил.
5. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: : учеб. пособие для ссузов, -2-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2005. -204.
6. Гейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. М.: Просвещение. 1981. -239с.
7. Энциклопедический словарь юного математика /Сост. Э-68 Савин А.П. М.: Педагогика, 1989
8. Интернет ресурсы

Отчет о работе: Распечатанный реферат, защита реферата.

Критерии оценки реферата

При оценке реферата учитывается:

1. Актуальность темы;
2. Соответствие содержания теме;
3. Глубина проработки материала;
4. Грамотность и полнота использования источников;
5. Соответствие оформления реферата требованиям.

Оценка «отлично» выставляется при условии:

1. присутствие всех вышеперечисленных требований;
2. знание обучающимся изложенного в реферате материала, умение грамотно и аргументировано изложить суть проблемы;
3. присутствие личной заинтересованности в раскрываемой теме, отстаивать собственную точку зрения, аргументы и комментарии, делать выводы;
4. умение свободно беседовать по любому пункту плана, отвечать на вопросы по теме реферата;

Т.е. при защите реферата показать не только «знание - воспроизведешь», но и «знание - понимание», «знание - умение».

Оценка «хорошо» выставляется при условии:

1. мелкие замечания по оформлению реферата;
2. незначительные трудности по одному из перечисленных выше требований.

Оценка «удовлетворительно» выставляется при условии:

1. тема реферата раскрыта недостаточно полно;
2. неполный список литературы и источников;
3. затруднения в изложении, аргументировании.

2.4 Самостоятельная работа №4 (4 час.)

Тема: Вычисления погрешности округления.

Цель: закрепление умений и навыков определять абсолютную и относительную погрешности числа; научиться определять верные значащие цифры числа; научиться определять погрешности функций.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Понятие погрешности числа

Разность точного и приближенного значений величины называется *погрешностью приближения* (обозначается Δx),

т.е. $\Delta x = x - a$ - **погрешность приближения**

откуда $x = a + \Delta x$,

т.е. истинное значение равно сумме приближенного значения и погрешности приближения.

Модуль разности точного и приближенного значений величины называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа x .

т.е. $|x - a| = |\Delta x|$ - **абсолютная погрешность приближения**.

Запись $x = a \pm h$ означает, что истинное значение величины x заключено между границами, т.е. $a - h \leq x \leq a + h$

Пример №1. На предприятии 1284 рабочих и служащих. При округлении этого числа до 1300 абсолютная погрешность составляет $1300 - 1284 = 16$. При округлении до 1280 абсолютная погрешность составляет $1284 - 1280 = 4$.

Пример №2. Даны приближенные значения числа $x = \frac{2}{3}$; $\alpha_1 = 0,6$; $\alpha_2 = 0,66$; $\alpha_3 = 0,67$.

Какое из этих трех приближений является лучшим?

Решение: Находим

$$\Delta x_1 = \left| \frac{2}{3} - 0,6 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right| = \frac{1}{15};$$

$$\Delta x_2 = \left| \frac{2}{3} - 0,66 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{33}{50} \right| = \frac{1}{150};$$

$$\Delta x = \left| \frac{2}{3} - 0,67 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{67}{100} \right| = \frac{1}{300};$$

Лучшим приближением числа x является $\alpha_3 = 0,67$.

Пример №3. Длина детали x (см) заключена в границах $33 \leq x \leq 34$. Найти границу абсолютной погрешности измерения детали.

Решение: Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: $a = (33+34)/2 = 33,5$ (см).

Тогда граница абсолютной погрешности приближенного значения длины детали не превзойдет 0,5 (см). Величину Δa можно найти и как полуразность верхней и нижней границ, т.е. $\Delta a = (34-33)/2 = 0,5$ (см). Длина детали x , найденная с точностью до $\Delta a = 0,5$ (см), заключена между приближенными значениями числа x : $33,5 - 0,5 \leq x \leq 33,5 + 0,5$;

$$x = 33,5 \pm 0,5 \text{ (см)}.$$

Отношение абсолютной погрешности приближения к модулю приближенного значения величины называется *относительной погрешностью* приближения и обозначается δ .

Т.е.

$$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x - a|}{|a|} = \delta \text{ является относительной погрешностью приближения}$$

Пример №4. При измерении длины L и диаметра проводника получили $L = (10,0 \pm 0,1)$ м, $d = (2,5 \pm 0,1)$ мм. Какое из этих измерений точнее?

Решение: Измерение длины проводника производилось с точностью до 0,1 м = 100 мм, а измерение диаметра проводника – с точностью до 0,1 мм.

При измерении длины проводника допускается абсолютная погрешность в 100 мм на 10000 мм, и, следовательно, допустимая абсолютная погрешность составляет

$$\frac{100}{10000} = 0,01 = 1\% \text{ измеряемой величины.}$$

При измерении диаметра допустимая абсолютная погрешность составляет

$$\frac{0,1}{2,5} = 0,04 = 4\% \text{ измеряемой величины. Следовательно, измерение длины}$$

проводника выполнено точнее.

Пример 5. Известно, что 0,111 является приближенным значением для $\frac{1}{9}$. Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближения.

Решение: Здесь $x = \frac{1}{9}$, $a = 0,111$. Тогда $\Delta x = x - a = \frac{1}{9} - 0,111 = 1/9000$ -а.п.п,

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{1}{9000} \cdot \frac{1}{0,111} = \frac{1}{999} \text{ -о.п.п}$$

Пример №6. В школе 197 учащихся. Округляем это число до 200. Абсолютная погрешность составляет $200 - 197 = 3$. Относительная погрешность равна $\frac{3}{197}$ или, округленно, $\frac{3}{200} = 1,5\%$.

В большинстве случаев невозможно узнать точное значение приближенного числа, а значит, и точную величину погрешности. Однако почти всегда можно установить, что погрешность (абсолютная или относительная) не превосходит некоторого числа.

Пример №7. Продавец взвешивает арбуз на чашечных весах. В наборе гирь наименьшая — 50 г. Взвешивание дало 3600 г. Это число — приближенное. Точная масса арбуза неизвестна. Но абсолютная погрешность не превышает 50 г. Относительная погрешность не превосходит $\frac{50}{3600} \approx 1,4\%$.

Задания по теме

№	Вариант 1	Вариант 2
Найдите абсолютную погрешность округления до единиц следующих чисел:		
1	1) 0,8; 2) 7,6; 1 балл 1 балл	1) 19,3; 2) 563,58. 1 балл 1 балл
2	Граница абсолютной погрешности приближенного значения 386 числа $x = 0,5$. Укажите границы, в которых заключено число x . 2 балла	Найдите границу абсолютной погрешности измерений, полученных в виде неравенства $37 < x < 38$. 2 балла
3	Амперметр дает точность $\pm 0,02$ А. При измерении силы тока получили 10,63 А. Укажите границы этого числа. 2 балла	Атомная масса водорода $1,0082 \pm 0,0005$, а меди $63,44 \pm 0,15$. Укажите границы приближенных значений этих чисел. 2 балла
4	Шоколадка стоит 40 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок).	В университетскую библиотеку привезли новые учебники по геометрии для 2—3 курсов, по 280 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 7 полок,

	Сколько шоколадок можно получить на 320 рублей в воскресенье? 2 балла	на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми учебниками? 2 балла
5	Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения? 2 балла	Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения? 2 балла
6	Граница абсолютной погрешности приближенного значения a равна h . Найдите границы, в которых заключено число x , если:	
	$a=23$; $h=0.5$; 2 балла	$a=1.5$; $h=0.01$; 2 балла

Рекомендуемая литература:

1. Алгебра. Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений под редакцией Теляковского С.А, М., Просвещение , 2012
2. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. М.: «Наука», 1989.

3.<http://www.mgopu.ru/PVU/2.1/nummethods/Chapter1.htm>

4.<http://www.intuit.ru/department/calculate/calcmathbase/1/4.html>

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Что называют абсолютной погрешностью?
2. Сформулируйте определение относительной погрешности.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	оценка
6-8	3
9-10	4
11-14	5

2.5 Самостоятельная работа № 5 (4час.)

Тема: Действия с комплексными числами

Цель: формирование умений графического изображения комплексных чисел, выполнение арифметических операций с комплексными числами.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит задач для самостоятельного выполнения и контрольных вопросов. Не забывайте о правильном оформлении решения. Каждое правильно выполненное задание оценивается определенным количеством баллов.

1.Изображение комплексных чисел.

Комплексные числа записываются в виде: $a+bi$. Здесь a и b –действительные числа, а i –мнимая единица, т.е. $i^2=-1$. Число a называется *абсциссой*, а b –*ординатой* комплексного числа $a+ bi$. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.

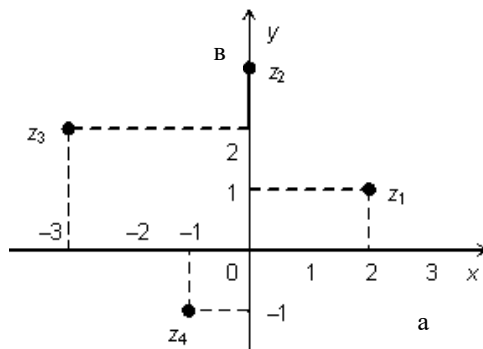
Модулем комплексного числа называется длина вектора OP , изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy . Каждому комплексному числу $z = a + bi$ можно сопоставить точку с координатами $(a;b)$, и наоборот, каждой точке с координатами $(c;d)$ можно сопоставить комплексное число $w = c + di$. Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как точки плоскости. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, обычно называют комплексной плоскостью.

Пример№1. Изобразим на комплексной плоскости числа

$$z_1 = 2 + i; \quad z_2 = 3i; \quad z_3 = -3 + 2i; \quad z_4 = -1 - i.$$

Решение:



2. Действия с комплексными числами

Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга.

1) Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число, определяемое равенством (1)

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

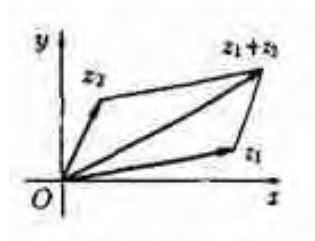
Пример №2 Найдите сумму комплексных чисел $z_1 = 5 + 2i$ и $z_2 = 2 - 5i$

$$z_1 + z_2 = (5 + 2i) + (2 - 5i) = 5 + 2i + 2 - 5i = 7 - 3i$$

Сложение комплексных чисел обладает переместительным (коммутативным) и сочетательным (ассоциативным) свойствами:

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$

Из (1) следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы (см. рис.).



Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Это соотношение называется неравенством треугольника.

2) Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z , которое, будучи сложеным с z_2 , дает число z_1 т. е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, то из этого определения легко получить z :

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \quad (2)$$

Пример № 3 Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ если а) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$,

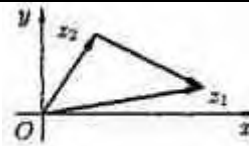
б) $z_1 = 5 + 2i$ и $z_2 = 5 - 2i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 2i - (5 - 2i) = 5 + 2i - 5 + 2i = 4i$$

Из равенства (2) следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (см. рис.).



Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$. т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Поэтому, например, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z , находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, т. е. окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

3) Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2). \quad (3)$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

Пример № 4 Найдите произведение:

$$а) z_1 z_2 = (2-3i)(-5+4i) = -10+8i+15i-12i^2 = -10+23i+12 = 2+23i.$$

$$б) z_1 z_2 = (5+2i)(-2-5i) = 10+4i-25i-10 = -20-21i$$

Заметим, что $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ — действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

т. е.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (5)$$

Формула (5) называется формулой Муавра.

Пример №5

Найти $(1 + \sqrt{3}i)^9$

Решение: Запишем сначала число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

$$z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos 9 \frac{\pi}{3} + i \sin 9 \frac{\pi}{3} \right) = 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^9 (-1) = -512.$$

4) Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению. Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z , которое, будучи умноженным на z_2 , дает число z_1 , т. е. $z_1/z_2 = z$, если $z_2 z = z_1$.

Число $\bar{z} = a - bi$ называется комплексно-сопряженным к $z = a + bi$. Равенство

$z\bar{z} = a^2 + b^2$ позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{(c+di) \cdot (c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример №6

Выполните деление:

$$a) \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$$

$$б) \frac{z_1}{z_2} = \frac{5+2i}{2-5i} = \frac{(5+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{10+4i+25i-10}{4+25} = \frac{29i}{29} = i$$

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

5. Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n -й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n -й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω , удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, а $\omega = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда имеем $r^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$ То есть

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad \text{и} \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad (\text{арифметический корень}).$$

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Получим n различных значений корня. При других значениях k , в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k=n$ имеем

$$\omega_n = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi n}{n} \right) = \\ = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) = \omega_0 \\ (k=0).$$

Итак, для любого $z \neq 0$ корень n -й степени из числа z имеет ровно n различных значений.

Пример №7

Найти значения а) $\sqrt[3]{i} = \omega$; б) $\sqrt{-1} = \omega$

Решение: а) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Стало быть,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right),$$

$$k = 0, 1, 2.$$

При $k=0$ имеем

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

при $k=1$ имеем

$$\omega_1 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

при $k=2$ имеем

$$\omega_2 = \cos \frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

б) Снова запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi.$$

Поэтому

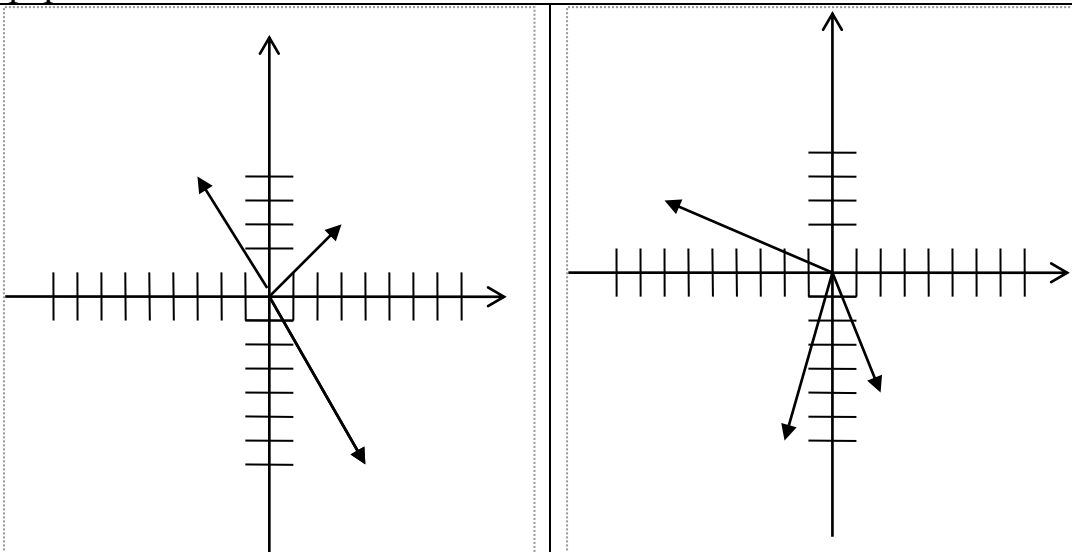
$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1.$$

При $k=0$ получаем $\omega_0 = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$, а при $k=1$ получаем

$$\omega_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i. \text{ Таким образом, } \sqrt{-1} = i \text{ и } \sqrt{-1} = -i.$$

Задания по теме

1 вариант	2 вариант	Количество баллов
№ 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:		
$Z_1 = 4i$	$Z_1 = -5i$	1
$Z_2 = 3 + i$	$Z_2 = 4 + i$	1
$Z_3 = -4 + 3i$	$Z_3 = -7 + 2i$	1
$Z_4 = -2 - 5i$	$Z_4 = -3 - 6i$	1
№ 2 . Вычислите модули заданных комплексных чисел		
$Z_5 = 3 + 4i$	$Z_5 = 8 + 6i$	1
№ 3. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:		

а) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$.	$(3 - 2i) + (5 + i)$.	2
б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$.	$(4 + 2i) + (-3 + 2i)$.	2
в) $(-2 + 3i) + (7 - 2i)$.	$(-5 + 2i) + (5 + 2i)$.	2
г) $(5 - 4i) + (6 + 2i)$.	$(-3 - 5i) + (7 - 2i)$.	2
№ 4. Произведите умножение комплексных чисел:		
а) $(2 + 3i)(5 - 7i)$.	$(1 - i)(1 + i)$.	2
б) $(6 + 4i)(5 + 2i)$.	$(3 + 2i)(1 + i)$.	2
в) $11) (3 - 2i)(7 - i)$.	$(6 + 4i)3i$.	2
г) $(-2 + 3i)(3 + 5i)$.	$(2 - 3i)(-5i)$.	2
№ 5. Выполните действия:		
а) $(3 + 5i)^2$.	а) $(3 + 2i)^2$.	2
б) $(2 - 7i)^2$.	б) $(3 - 2i)^2$.	2
в) $(6 + i)^2$.	в) $(4 + 2i)^2$.	2
г) $(1 - 5i)^2$.	г) $(5 - i)^2$.	2
№ 6. Выполните действия:		
а) $(3 + 2i)(3 - 2i)$.	а) $(7 - 6i)(7 + 6i)$.	2
б) $(5 + i)(5 - i)$.	б) $(4 + i)(4 - i)$.	2
в) $(1 - 3i)(1 + 3i)$.	в) $(1 - 5i)(1 + 5i)$.	2
№ 7. Решите уравнения:		
а) $x^2 - 4x + 13 = 0$.	а) $2,5x^2 + x + 1 = 0$.	3
б) $x^2 + 3x + 4$	б) $4x^2 - 20x + 26 = 0$.	3
№ 8. На рисунке показано графическое изображение комплексных чисел. Перерисуйте рисунок в тетрадь. Обозначьте комплексные числа как z_1, z_2, z_3 . Запишите соответствующие аналитические формы.		
		2

Рекомендуемая литература:

1. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., Мнемозина, 2012.

2. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Дайте определение комплексного числа?
2. Как найти комплексное число, сопряженное данному?
3. Как изобразить комплексное число на координатной плоскости?
4. Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления комплексных чисел.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Набранное количество баллов	Оценка
25 – 32 баллов	3
33 - 38 баллов	4
39 - 43 балла	5

2.6 Самостоятельная работа № 6 (4час.)

Тема: Аксиомы геометрии

Цель: Совершенствование навыков работы с текстовой информацией, комплексно использовать источники информации. Овладение навыками конспектирования.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы, прочитайте рекомендуемую литературу, требования к написанию и оформлению конспекта (см приложения).

Аксиомы геометрии – это исходные положения, на основе которых строится вся геометрия, т.е. путем логических рассуждений устанавливаются свойства геометрических фигур.

В аксиомах выражены свойства **основных геометрических понятий**. К таковым в курсе геометрии относятся понятия **точки, прямой, плоскости**, понятия «**лежать между**» для точек прямой и понятие **наложения**. Кроме того, в аксиомах геометрии и вытекающих из них утверждениях используются такие

общематематические понятия, как «принадлежать» (или «лежать на»), «множество», «число» и т.д.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст учебника (Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10-11., Приложения 2. «Об аксиомах геометрии»). Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Сформулируйте группу аксиом характеризующих взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.
2. Сформулируйте аксиомы связанные с измерением отрезков.
3. Сформулируйте аксиомы стереометрии.

Отчет о работе: конспекты выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- содержательность конспекта, соответствие плану;
- отражение основных положений, результатов работы автора, выводов;
- ясность, лаконичность изложения мыслей студента;

- наличие схем, графическое выделение особо значимой информации;
- соответствие оформления требованиям;
- грамотность изложения;
- конспект сдан в срок.

Конспект оценивается «отлично» если:

- соблюдена логика изложения вопроса темы;
- материал изложен в полном объеме;
- выделены ключевые моменты вопроса;
- материал изложен понятным языком;
- формулы написаны четко и с пояснениями;
- схемы, таблицы, графики, рисунки снабжены пояснениями выполнены в соответствии с предъявляемыми требованиями;
- к ним даны все необходимые пояснения;
- приведены примеры, иллюстрирующие ключевые моменты темы;
- конспект сдан в срок.

Оценка «хорошо» - конспект, в основном удовлетворяет выше названным требованиям, однако допущены 2 – 3 несущественные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» если:

- несоблюдение литературного стиля изложения,
- неясность и нечеткость изложения,
- иллюстрационные примеры приведены не в полном объеме.

Оценка конспекта «неудовлетворительно» если:

- конспект составлен небрежно и неграмотно,
- имеются нарушения логики изложения материала темы, - не приведены иллюстрационные примеры,
- не выделены ключевые моменты темы.

2.7 Самостоятельная работа №7 (4 час.)

Тема: Параллельность в пространстве

Цель: Закрепление и систематизация знаний получаемых на аудиторных занятиях. Совершенствование навыков построения в пространстве, развитие пространственных образов.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

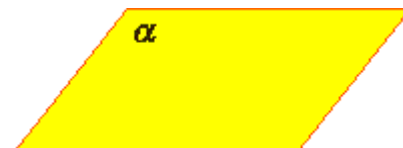
Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения и контрольных вопросов. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — объемный, пространственный и «μετρο» — измерять.

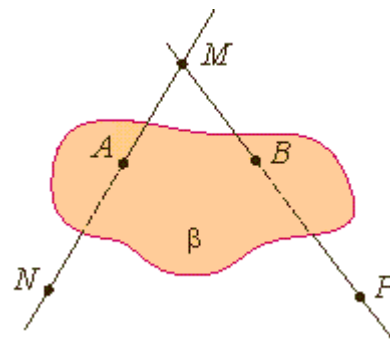
Простейшие фигуры в пространстве: точка, прямая, плоскость.

Плоскость.

Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.



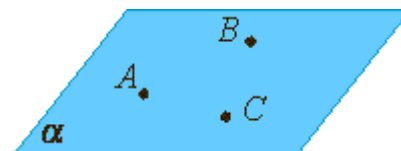
На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма или в виде произвольной области и обозначаются греческими буквами α , β , γ и т.д. Точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M , N , P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.



Аксиомы стереометрии и их следствия

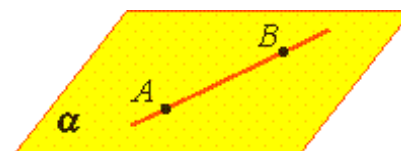
Аксиома 1.

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

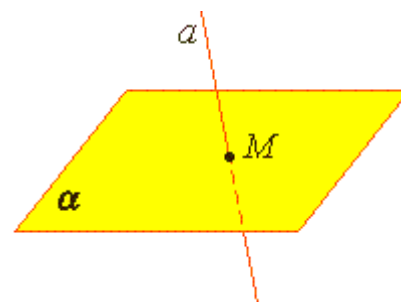


Аксиома 2.

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости. (Прямая лежит на плоскости или плоскость проходит через прямую).



Из аксиомы 2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

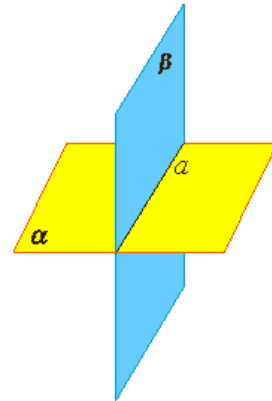


Аксиома 3.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, плоскости пересекаются по прямой.

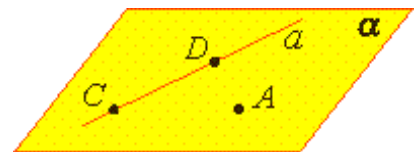
Пример: пересечение двух смежных стен, стены и потолка комнаты.



Некоторые следствия из аксиом

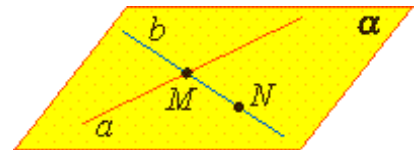
Теорема 1.

Через прямую a и не лежащую на ней точку A проходит плоскость, и притом только одна.



Теорема 2.

Через две пересекающиеся прямые a и b проходит плоскость, и притом только одна.

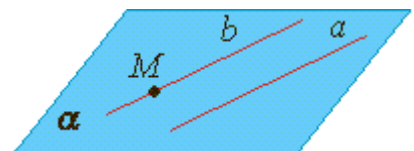


Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

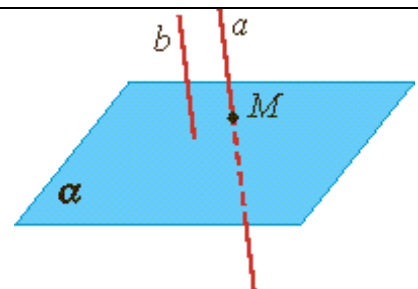
Теорема о параллельных прямых.

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.



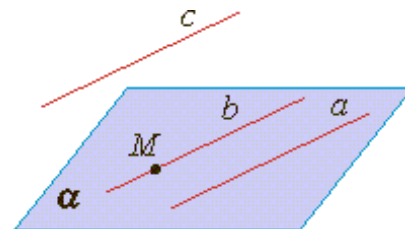
Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



Теорема о трех прямых в пространстве.

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$).



Параллельность прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости

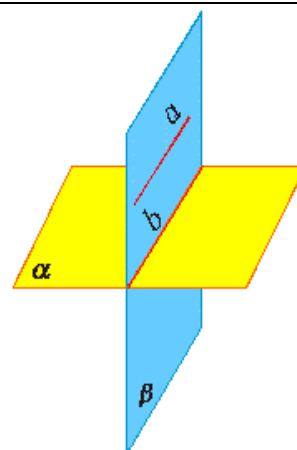
Теорема.

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.



Теорема.

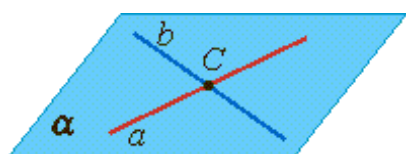
Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



Теорема.

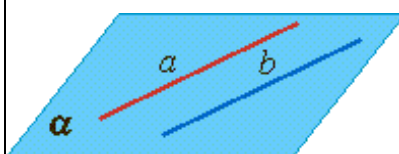
Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Взаимное расположение прямых в пространстве



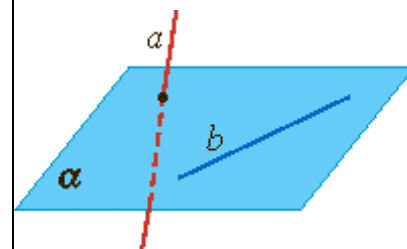
Пересекающиеся прямые:

лежат в одной
плоскости, имеют одну
общую точку.



Параллельные прямые:

лежат в одной
плоскости, не имеют
общих точек (не
пересекаются)

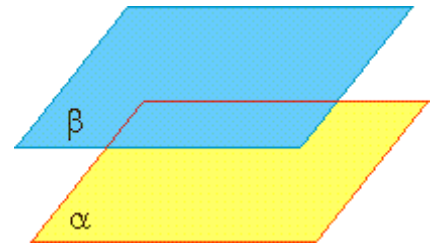


Скрещивающиеся прямые:

не лежат в одной
плоскости, не имеют
общих точек (не
пересекаются)

Параллельность плоскостей

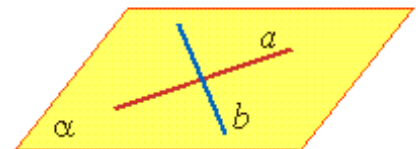
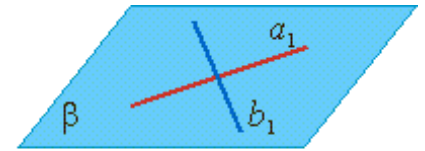
Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, т.е. не имеют ни одной общей точки. $\alpha \parallel \beta$.



Признак параллельности двух плоскостей

Теорема.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
Если $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, то $\alpha \parallel \beta$.



Свойства параллельных плоскостей

Если $\alpha \parallel \beta$ и они пересекаются с γ , то $a \parallel b$.	Если $\alpha \parallel \beta$ и $AB \parallel CD$, то $AB = CD$.
Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны	Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Задания по теме

1. Постройте чертеж по его словесному описанию.

Запишите условие задачи на математическом языке (с помощью символов)

- 1). Прямая MP параллельна плоскости α , а прямая MT пересекает эту плоскость в точке T .
- 2). Плоскость α пересекает три параллельные прямые a , b и c соответственно в точках A , B и C , лежащих на одной прямой.
- 3). Плоскость α пересекает три параллельные прямые a , b и c соответственно в вершинах треугольника ABC .

- 4). Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α , а прямые BK и CK пересекают эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1 .
- 5). Плоскость α проходит через середины сторон AB и AC треугольника ABC и не содержит вершины A .
- 6). Прямая MP параллельна плоскости α , а плоскость PMT пересекает плоскость α по прямой KT .
- 7). Прямая a параллельна каждой из пересекающихся плоскостей α и β .
- 8). Прямая a параллельна каждой из параллельных плоскостей α и β .
- 9). Плоскости α и β имеют общую прямую a , плоскости α и γ общую прямую b , а плоскости β и γ общую прямую c . Прямые a и b пересекаются в точке M .
- 10). Плоскости α и β имеют общую прямую a , плоскости α и γ общую прямую b , а плоскости β и γ общую прямую c . Прямые a и b параллельны.
- 11). Плоскости α и β имеют общую прямую a , плоскости α и γ общую прямую b , а плоскости β и γ параллельны.
- 12). Сторона BC треугольника ABC лежит на плоскости α , через вершину A , не лежащую в плоскости, и точку M – середину стороны AC проведены соответственно плоскости β и γ , пересекающие плоскость треугольника ABC по прямым AK и MT .

2. В тетраэдре $ABCD$ точки K , F , N и M – середины ребер соответственно AD , BD , BC и AC . Заполните таблицу, выбрав (обведя в кружок) определенное вами расположение указанных прямой и плоскости: А – пересекаются, Б – параллельны, В – прямая лежит в плоскости, Г – невозможно определить:

	Прямая и плоскость	Взаимное расположение
1	BD и AMN	А Б В Г
2	MN и ABC	А Б В Г
3	KC и DMN	А Б В Г
4	MN и ABD	А Б В Г
5	KF и DMN	А Б В Г
6	FN и KMF	А Б В Г
7	CF и AND	А Б В Г
8	FN и DMK	А Б В Г

3. Докажите, что плоскость α , проходящая через середины двух ребер основания тетраэдра и вершину, не принадлежащую основанию, параллельна третьему ребру основания. Найдите периметр и площадь сечения тетраэдра плоскостью α , если длины всех ребер тетраэдра равны 20 см.

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Геометрия 10 класс. Составители Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. – Волгоград, «Учитель», 2002.
- 3 Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995.
4. Лаппо Л.Д., Морозов А.В. Геометрия. Типовые вопросы и задачи – М.: «Экзамен», 2008.
5. Шарапова В.К. Тематические тесты по геометрии: 10-11 классы, Феникс, 2007
6. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки по теме:

1. Продолжите предложение.
 - 1) Стереометрия-это раздел геометрии,...
 - 2) Простейшими и основными фигурами в пространстве является...
 - 3) Запись $B \in \alpha$ означает...
 - 4) Запись $\alpha \cap \beta = l$ означает...
 - 5) Какова бы ни была плоскость существуют...
 - 6) Если две различные прямые имеют общую точку, то через...
 - 7) Если две различные плоскости имеют общую точку, то...
 - 8) Через прямую и не лежащую на ней точку можно...
 - 9) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то...
 - 10) Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно...
2. Прямые a и c параллельны, а прямые a и b пересекаются. Могут ли прямые b и c быть параллельными?
3. Прямая a пересекает плоскость α . Лежит ли в плоскости α хотя бы одна прямая, параллельная прямой a ?

4. Две стороны параллелограмма параллельны плоскости α . Параллельны ли плоскости α плоскость параллелограмма?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется при условии правильного, осознанного выполнения всего объёма работы, указанного в задании самостоятельной работы №7, при условии правильного решения всех практических задач, грамотного и аккуратно оформленного решения.

Оценка «хорошо» - отчёт, в основном, удовлетворяет выше названным требованиям, однако допущены 2-3 несущественных ошибки.

Оценка «удовлетворительно» - ставится в том случае, когда обучающийся показывает неглубокое понимание материала по теме работы, допущены 4 ошибки и отчёт оформлен неаккуратно, без учёта требований к оформлению.

Оценка «неудовлетворительно» - в отчёте допущены существенные ошибки, не все задания выполнены, имеются серьёзные отклонения от требований к оформлению. В случае получения данной оценки студент обязан выполнить работу заново.

2.8 Самостоятельная работа №8 (4 час.)

Тема: Перпендикулярность в пространстве

Цель: Расширение и углубление знаний получаемых на аудиторных занятиях. Совершенствование навыков построения в пространстве, развитие пространственных образов.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения и контрольных вопросов. Не забывайте о правильном оформлении решения.

1. Перпендикулярность прямой и плоскости

Две прямые в пространстве называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90° .

Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

Лемма: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Определение: Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости.

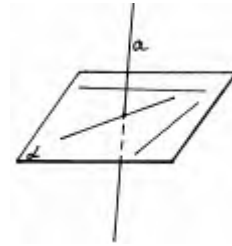
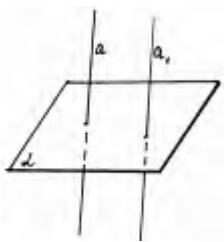


рис.1

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α , то она, очевидно, пересекает эту плоскость.

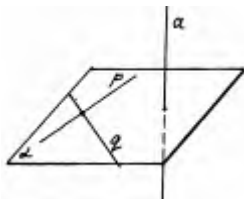
Связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.



1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

рис. 2

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Теорема: Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

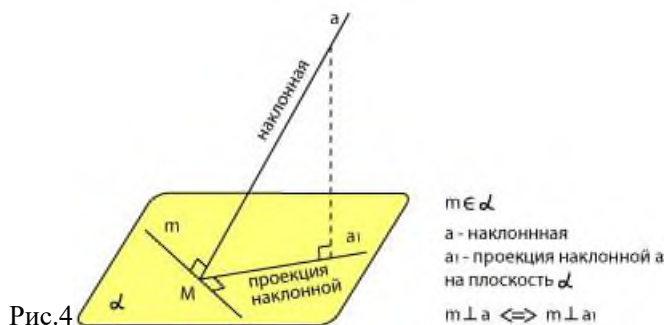
рис. 3

Замечания:

1. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом единственная.
2. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.
3. Если две плоскости перпендикулярны к прямой, то они параллельны.

Теорема о трех перпендикулярах:

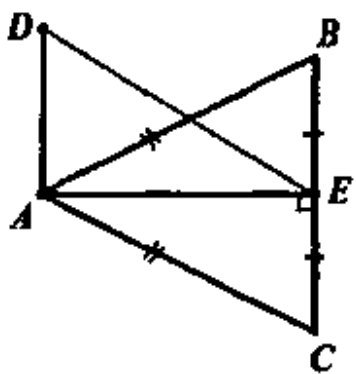
Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.



Обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Задача. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC . Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Найти расстояние от точки A до прямой BC .

Решение.



Пусть точка E это середина BC . Тогда BC будет перпендикулярным AE . То есть AE будет расстояние от точки A до прямой BC .

EA является проекцией DE на плоскость ABC . AE перпендикулярен BC , а следовательно по теореме о трех перпендикулярах DE будет перпендикулярен BC . Получаем, что DE - это расстояние от точки D до отрезка BC . Теперь будем определять AE .

$$BE = (1/2) \cdot BC = 3 \text{ см.}$$

Так как треугольник ABE прямоугольный, то можем по теореме Пифагора найти AE .

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 25 - 9 = 16, \text{ следовательно, } AE = 4 \text{ см.}$$

Ответ. 4 см.

2. Перпендикулярность плоскостей.

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой AB и двумя полуплоскостями с общей границей, не принадлежащими одной плоскости.

Угол ECD —линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку C на ребре, а лучи CE и CD должны быть перпендикулярны к ребру.

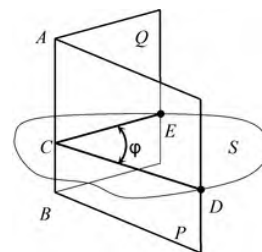


Рис.6

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера любого из его линейных углов.

Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если он равен 90° (меньше 90° , больше 90°). Пусть α - тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных углов. Тогда угол между пересекающимися плоскостями равен α . ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

Определение: Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

Признак перпендикулярности двух плоскостей: Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны (рис.7).

Следствие: Плоскость перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис.8).

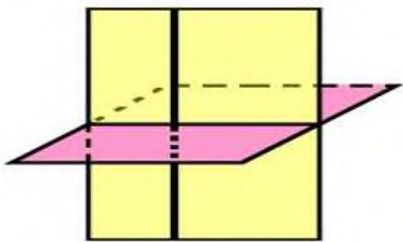


Рис. 7

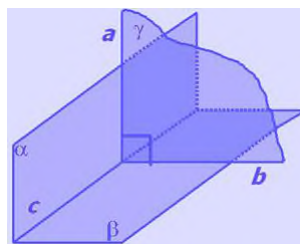


Рис.8

Задания по теме

Решите задачи:

1. Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 12 см. и 14 см. Найдите расстояние от середины этого отрезка до плоскости α .
2. В тетраэдре $DAVC$ ребра $AC=AB=BC$, точка M – середина ребра AB . Доказать, что угол DMC – линейный угол двугранного угла $DAVC$.
3. В тетраэдре $DAVC$ ребро CD перпендикулярно к плоскости ABC , $AC=BC=10$ см, $AB=16$ см, $CD=6$ см. Найдите линейный угол двугранного угла $CAVD$.
4. В треугольнике ABC $AB=BC=25$, $AC=48$, BD – перпендикуляр к плоскости ABC . $BD=\sqrt{15}$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC .

5. Из точки M проведен перпендикуляр MB к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что треугольники AMD и MCD прямоугольные.

6. Точка M равноудалена от всех сторон равностороннего $\triangle ABC$, сторона которого 4 см. Расстояние от точки M до плоскости (ABC) равно 2 см. Найдите расстояние от точки M до вершин $\triangle ABC$. Найдите угол между плоскостями (AMB) и (ABC) .

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Геометрия 10 класс. Составители Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. – Волгоград, «Учитель», 2002.
3. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
4. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки по теме:

1. Верно ли утверждение: если две прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то эти прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат на одной плоскости?
2. Параллельные прямые b и c лежат в плоскости α , а прямая a перпендикулярна к прямой b . Верно ли утверждение: а) прямая a перпендикулярна к прямой c ; прямая a пересекает плоскость α ?
3. Верно ли утверждение, что все прямые перпендикулярные к данной плоскости и пересекающие данную прямую лежат в одной плоскости?
4. Могут ли две плоскости, каждая из которых перпендикулярна к третьей плоскости быть: а) параллельными плоскостями; б) перпендикулярными плоскостями?
5. Сколько двугранных углов имеет: а) тетраэдр; параллелепипед?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется при условии правильного, осознанного выполнения всего объема работы, указанного в задании самостоятельной работы

№8 , при условии правильного решения всех практических задач, грамотного и аккуратно оформленного решения.

Оценка «хорошо» - отчёт, в основном, удовлетворяет выше названным требованиям, однако допущены 2-3 несущественных ошибки.

Оценка «удовлетворительно» - ставится в том случае, когда обучающийся показывает неглубокое понимание материала по теме работы, допущены 4 ошибки и отчёт оформлен неаккуратно, без учёта требований к оформлению.

Оценка «неудовлетворительно» - в отчёте допущены существенные ошибки, не все задания выполнены, имеются серьёзные отклонения от требований к оформлению. В случае получения данной оценки студент обязан выполнить работу заново.

2.9 Самостоятельная работа №9 (4 час.)

Тема: Площадь ортогональной проекции многоугольника

Цель: Расширение и углубление знаний получаемых на аудиторных занятиях. Совершенствование навыков построения в пространстве, развитие пространственных образов.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

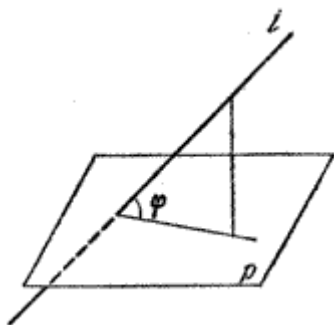
Методические указания

Площадь проекции многоугольника

Параллельное проектирование, при котором проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций, называется **ортогональным**.

Ортогональной проекцией фигуры на данную плоскость называют множество точек пересечений с этой плоскостью перпендикулярных с ней прямых, проходящих через все точки этой фигуры.

Угол между прямой и плоскостью называется углом между данной прямой и ее проекцией на плоскость.



Теорема. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла, образованного плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Пусть фигура Φ с площадью S_Φ лежит в плоскости α , а фигура Φ^1 с площадью S_{Φ^1} является ортогональной проекцией Φ на плоскость β , то

$$S_{\Phi^1} = S_\Phi \cos \varphi, \text{ где } \varphi - \text{угол между плоскостями } \alpha \text{ и } \beta.$$

Доказательство:

Каждый многоугольник можно разбить на треугольники, сумма площадей которых равна площади многоугольника. Поэтому теорему достаточно доказать для треугольника.

Пусть $\triangle ABC$ проектируется на плоскость p . Рассмотрим два случая:
 а) одна из сторон $\triangle ABC$ параллельна плоскости p ;
 б) ни одна из сторон $\triangle ABC$ не параллельна p .

Рассмотрим первый случай: (рис 1) Пусть $AB \parallel p$.

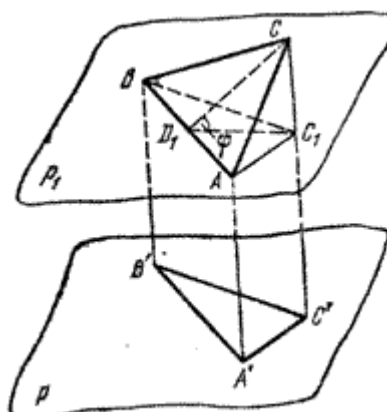


Рис.1

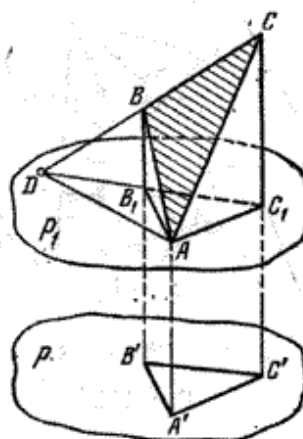


Рис.2

Проведем через прямую AB плоскость $p_1 \parallel p$ и спроектируем ортогонально $\triangle ABC$ на p_1 и на p (рис.); получим $\triangle ABC_1$ и $\triangle A'B'C'$.

По свойству проекции имеем $\triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$, и поэтому

$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle A'B'C'}$$

Проведем отрезок $CD_1 \perp AB$ и отрезок D_1C_1 . Тогда $D_1C_1 \perp AB$, а $\widehat{CD_1C_1} = \varphi$ есть величина угла между плоскостью $\triangle ABC$ и плоскостью p_1 . Поэтому

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D_1 = \frac{1}{2} AB \cdot CD_1 \cdot \cos \varphi = S_{\triangle ABC} \cos \varphi$$

и, следовательно, $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cos \varphi$.

Перейдем к рассмотрению второго случая. Проведем плоскость $p_1 \parallel p$ через ту вершину $\triangle ABC$, расстояние от которой до плоскости p наименьшее (пусть это будет вершина A). Спроектируем $\triangle ABC$ на плоскости p_1 и p (рис.2); пусть его проекциями будут соответственно $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle A'B'C'$.

Пусть $(BC) \cap p_1 = D$.

Тогда

$$S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle ADC_1} - S_{\triangle ADB_1} = (S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADB}) \cos \varphi = S_{\triangle ABC} \cos \varphi$$

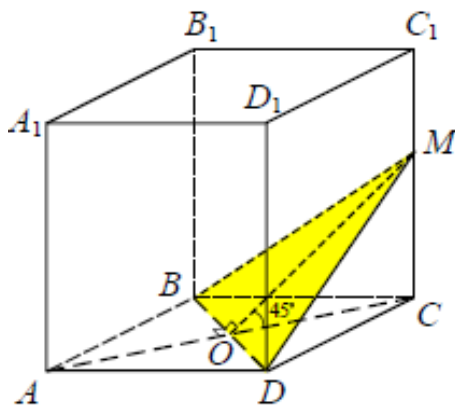


Рис. 1

Пример 1. В правильной четырёхугольной призме сторона основания равна 4 см. Через диагональ основания под углом 45° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найти площадь сечения.

Решение. Согласно условию задачи, площадь ортогональной проекции сечения на плоскость основания призмы равна половине его площади (см. рис. 1), т.е.

$$S_{\text{пр}} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Тогда, используя формулу (1), полу-}$$

$$\text{чаем: } S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos 45^\circ} = 8\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $8\sqrt{2} \text{ см}^2$.

Пример 2. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 4 и 5, угол между ними равен 30° . Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, пересекающей все его боковые рёбра и образующей с плоскостью основания угол в 45° .

Решение. Для нахождения площади сечения воспользуемся формулой (1). Поскольку

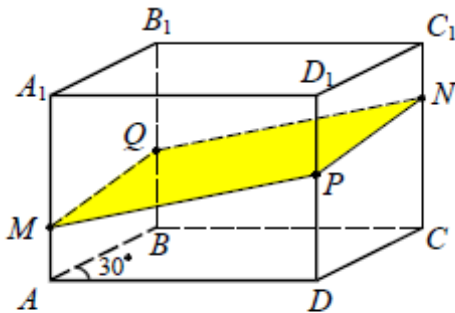


Рис. 2

секущая плоскость пересекает все боковые рёбра прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, то ортогональной проекцией сечения $MQNP$ является параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 2). Отметим, что $MQNP$ также является параллелограммом, так как $MQ \parallel PN$ и $MP \parallel QN$ по свойству параллельных плоскостей (если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны).

Найдем площадь параллелограмма $ABCD$. Пусть, для определённости, $AB = 4$, $AD = 5$, $\angle BAD = 30^\circ$, тогда $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = 10$.

Поскольку $S_{MQNP} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \varphi}$, где $\varphi = 45^\circ$ – угол между плоскостью сечения и основани-

ем параллелепипеда (на рис. 2 этот угол не показан), то $S_{MQNP} = 10\sqrt{2}$.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Задача №3 Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом $\varphi = 30^\circ$ к плоскости ее основания. Найти площадь образующегося сечения, если сторона основания призмы $a = 6$ см.

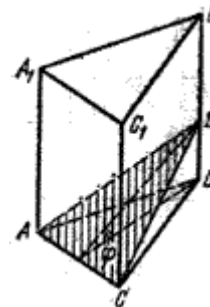


Рис.3

Решение: Изобразим сечение данной призмы (рис.2). Так как призма правильная, то ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Значит, $\triangle ABC$ есть проекция $\triangle ADC$, поэтому

$$S_{\triangle ADC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos \varphi} = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3}}{4 \cos \varphi},$$

или

$$S_{\triangle ADC} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 18см^2 .

Задача № 4 Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол, равный наименьшему углу этого треугольника.

Решение: Пусть S – площадь данного треугольника, S_1 – площадь ортогональной проекции этого треугольника на некоторую плоскость. В треугольнике наименьший угол (обозначим его α) лежит против наименьшей стороны. По теореме косинусов

$$\cos \alpha = \frac{36+49-25}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7}, \text{ тогда, } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$S = 1/2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \sin \alpha = 1/2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}. \text{ Следовательно,}$$

$$S_1 = S \cos \alpha = 6\sqrt{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30\sqrt{6}}{7} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{30\sqrt{6}}{7} \text{ см}^2$$

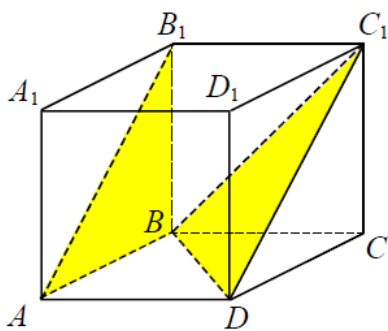


Рис. 5

Пример 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти угол между плоскостью грани $AA_1 B_1 B$ и плоскостью $BC_1 D$.

Решение. Пусть ребро куба равно a . Ортогональной проекцией треугольника $BC_1 D$ является треугольник $AB_1 B$ (см. рис. 5), площадь которого равна $\frac{a^2}{2}$. Поскольку

$BD = BC_1 = C_1 A = a\sqrt{2}$ (как диагонали граней куба), то

$$S_{\triangle BC_1 D} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Из формулы о площади ортогональной проекции многоугольника получим:

$$\cos \varphi = \frac{S_{\triangle AB_1 B}}{S_{\triangle BC_1 D}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Отсюда } \varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задания по теме

1. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания под углом 30° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найдите диагональ основания, если площадь сечения равна $8\sqrt{3}$ см.
2. Высота прямой призмы равна 1. В основании призмы лежит ромб со стороной равной 2, и острым углом 30° . Через сторону основания проведена секущая плоскость с углом наклона к плоскости основания 60° . Найдите площадь сечения призмы.

3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через точки A , D_1 и ребро BB_1 проведено сечение. Найдите угол наклона секущей плоскости к плоскости основания $ABCD$.
4. Задача. В правильной треугольной призме, каждое ребро которой равно 9 дм, постройте сечение, проходящее через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований призмы. Найдите: а) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы; б) площадь сечения призмы.
5. . В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка P – середина ребра CC_1 . Найдите угол между плоскостями ABC и BPD_1 .

Рекомендуемая литература:

1. Погорелов А. В, Геометрия для 7-11 классов, Учебник для общеобразовательных учреждений 2001 13-е изд. - М.: 2014 - 175 с.
2. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Сформулируйте определение между прямой и плоскостью.
2. Что называется ортогональной проекцией фигуры?
3. Чем является ортогональная проекция точки, отрезка, треугольника, прямоугольника?
4. Сформулируйте теорему об ортогональной проекции многоугольника.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется при условии правильного, осознанного выполнения всего объёма работы, указанного в задании самостоятельной работы №9 , при условии правильного решения всех практических задач, грамотного и аккуратно оформленного решения.

Оценка «хорошо» - отчёт, в основном, удовлетворяет выше названным требованиям, однако допущены 2-3 несущественных ошибки.

Оценка «удовлетворительно» - ставится в том случае, когда обучающийся показывает неглубокое понимание материала по теме работы, допущены 4 ошибки и отчёт оформлен неаккуратно, без учёта требований к оформлению.

Оценка «неудовлетворительно» - в отчёте допущены существенные ошибки, не все задания выполнены, имеются серьёзные отклонения от требований к

оформлению. В случае получения данной оценки студент обязан выполнить работу заново.

2.10 Самостоятельная работа №10 (4 час.)

Тема: Прямоугольный параллелепипед

Цель: Формирование умений решать задачи на прямоугольный параллелепипед, куб.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Параллелепипедом называется призма, у которой основаниями служат параллелограммы.

Прямой параллелепипедом называется параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны основаниям.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основания которого прямоугольники.

Длины трёх ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общий конец, называют его **измерениями**. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Кубом называется прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

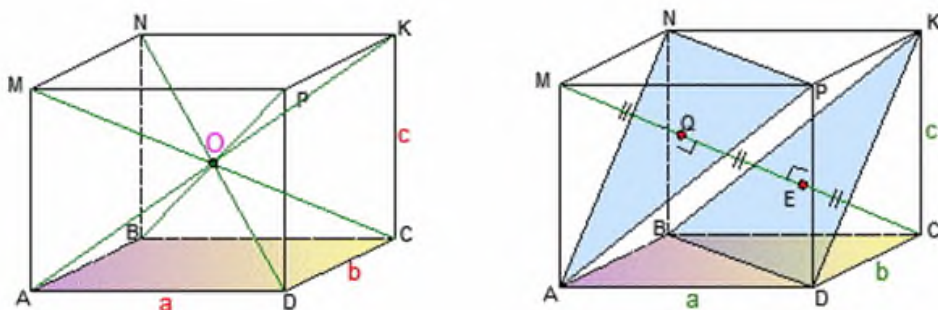


Рис.1

Свойства прямоугольного параллелепипеда и куба:

- 1) Все его грани — прямоугольники. Противоположные грани — равные прямоугольники.

- 2) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда - прямые.
- 2) Параллелепипед симметричен относительно середины его диагонали.
- 3) Любой отрезок с концами, принадлежащими поверхности параллелепипеда и проходящий через середину его диагонали, делится ею пополам.
- 4) Все диагонали параллелепипеда равны, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.
- 5) Точка пересечения диагоналей является центром описанного шара.
- 6) Квадрат диагонали AK прямоугольного параллелепипеда равен квадрату корню из суммы квадратов длин его измерений, то есть $AK^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- 7) Объем любого прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его измерений, то есть $V = abc$.
- 8) Площадь боковой поверхности $S = 2ab + 2bc + 2ac$.
- 9) Объем куба $V = a^3$.
- 10) Свойство диагоналей куба: диагональ MC куба $ABCDMNKP$ перпендикулярна плоскостям (ANP) и (KBD) и делится этими плоскостями на три равных отрезка: $MQ = QE = EC$.

Пример 1. Прямоугольный параллелепипед и куб имеют равные площади поверхности. Длина параллелепипеда равна 18 м, что в 2 раза больше его ширины и на 8 м больше его высоты. Найти ребро куба.

Решение: Измерения параллелепипеда: ширина $18/2 = 9$ м, высота $18 - 8 = 10$ м, длина 18 м. $S = 9 \cdot 10 \cdot 2 + 9 \cdot 18 \cdot 2 + 10 \cdot 18 \cdot 2 = 180 + 324 + 360 = 864$, $864/6 = 144$, $a^2 = 144$, $a = 12$ м - ребро куба.

Ответ: 12.

Пример №2. Ребро куба равно 3. Найти расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

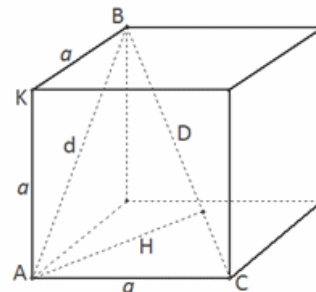


Рис.2

Решение: Найдем расстояние H от вершины куба A до диагонали $BC = D$. Из $\triangle AKB$: $d^2 = a^2 + a^2 = 9 + 9 = 18$, $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Из $\triangle ABC$: $D^2 = d^2 + a^2 = 18 + 9 =$

$$S = \frac{1}{2} ad = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{2},$$

$$S = \frac{1}{2} DH = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3}H = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{2},$$

$$H = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

27, $D = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Из прямоугольного $\triangle ABC$:

Ответ: $\sqrt{6}$ см.

Задача № 3 В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 12 см и 16 см. Высота параллелепипеда — 8 см. Найдите площадь его полной поверхности

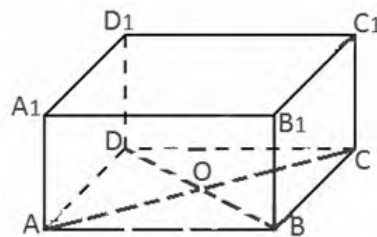


Рис. 3

Решение: Диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. По теореме Пифагора сторона

основания $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ см, поэтому периметр ромба равен 40 см. Боковая поверхность $S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot CC_1 = 40 \cdot 8 = 320$ см². Площадь ромба $S_{\text{ромба}} = 2S_{ABC} = 2 \cdot (AC \cdot OB) / 2 = AC \cdot OB = 16 \cdot 6 = 96$ см². Площадь полной поверхности $S_{\text{пт}} = 2S_{\text{ромба}} + S_{\text{б}} = 2 \cdot 96 + 320 = 512$ см². **Ответ:** 512 см².

Пример 4. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин его верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Определите высоту параллелепипеда, если диагональ основания равна 8 см, а боковое ребро равно 5 см.

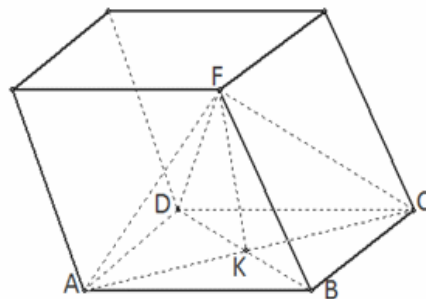


Рис.4

Решение: Поскольку одна из вершин основания параллелепипеда (обозначим ее F) одинаково удалена от всех вершин нижнего основания параллелепипеда, то вместе с диагональю нижнего основания (обозначим ее AC) она образует равнобедренный $\triangle AFC$. $AF = FC$ по условию. Одновременно, BF — это ребро параллелепипеда. Таким образом, в равнобедренном треугольнике AFC стороны равны следующим величинам: $AF = FC = 5$ см, $AC = 8$ см. Высота FK равнобедренного $\triangle AFC$ одновременно, будет являться высотой параллелепипеда. Кроме того, высота равнобедренного треугольника делит его основание пополам. Откуда, по теореме Пифагора высота будет равна: $FK^2 + (AC/2)^2 = FC^2$ $FK^2 + 16 = 25$ $FK^2 = 9$ $FK = 3$ см **Ответ:** 3 см.

Пример 5. Найти площадь основания ABCD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $DB_1 = 6$ см, $DB = 5$ см, $BC_1 = 4$ см.

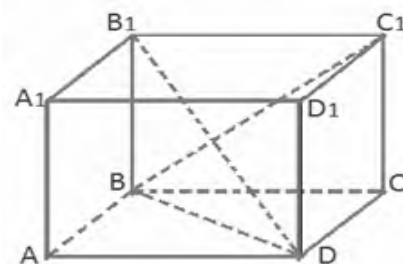


Рис.5

Решение: Для нахождения длин сторон (поскольку параллелепипед прямоугольный, а значит, все ребра пересекаются под прямым углом) используем теорему Пифагора. В прямоугольном

$$\triangle DBB_1: BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2}, \quad BB_1 = \sqrt{36 - 25} = 3, \quad \text{причем } BB_1 = CC_1 = 3.$$

прямоугольном $\triangle BC_1C: BC = \sqrt{BC_1^2 - C_1C^2}, \quad BC = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$ В $\triangle BCD:$

$$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2}, \quad CD = \sqrt{25 - 7} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Откуда площадь основания параллелепипеда равна: $S = BC \cdot CD = \sqrt{7} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{14}.$ **Ответ:** $3\sqrt{14} \text{ см}^2$

Задания по теме

Решите задачи:

1. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 8, 9, 12.
2. Сколько квадратных метров гипсокартона необходимо для обшивки стен комнаты, с размерами 10м, 4м, 3м? Дверные и оконные проемы не учитывать.
3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ - квадрат, $AD = 2$, $AC_1 = 2\sqrt{6}$. Найдите а) CC_1 , б) Докажите, что плоскости ACC_1 и BB_1D взаимно перпендикулярны.
4. В основании прямого параллелепипеда с высотой 8 см. лежит ромб, диагонали которого равны 12 см и 16 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
5. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $AC_1 = 12$ см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ угол в 30° , а с ребром $D_1 D$ угол в 45°

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Геометрия 10 класс. Составители Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. – Волгоград, «Учитель», 2002.
3. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
4. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Существует ли параллелепипед, у которого только одна боковая грань имеет форму прямоугольника?
2. Может ли диагональ прямоугольного параллелепипеда быть меньше бокового ребра?
3. В прямоугольном параллелепипеде проведено диагональное сечение. На какие многогранники разбивается при этом параллелепипед?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
$90 \div 100$	5	отлично
$70 \div 89$	4	хорошо
$50 \div 69$	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.11 Самостоятельная работа №11 (4 час.)

Тема: Формулы половинного угла. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Цель: Расширение и углубление знаний обучающихся по разделу «Тригонометрия».

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Справочный материал:

Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	нет	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	нет	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	нет	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	нет	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Формулы половинного аргумента:

- $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
- $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
- $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Пример № 1 Зная, что $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ вычислите при помощи формулы половинного угла значение косинуса 15 градусов.

Формула половинного угла для косинуса имеет вид $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$, тогда

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

Так как угол 15 градусов является углом первой координатной четверти, то косинус этого угла должен быть положительным (при необходимости смотрите раздел теории знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям).

$$\cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \quad \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Таким образом, так как $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций:

Эти формулы позволяют сумму и разность тригонометрических функций разложить на множители.

1. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
2. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
3. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
4. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$
5. $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
6. $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Пример № 2 Разложите на множители:

a) $\sin 6x + \sin 4x = 2 \sin \frac{6x+4x}{2} \cos \frac{6x-4x}{2} = 2 \sin 5x \cos x$

б) $\sin 43^\circ + \sin 17^\circ = 2 \sin \frac{43+17}{2} \cos \frac{43-17}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos 13^\circ = 2 * \frac{1}{2} * \cos 13^\circ = \cos 13^\circ$

Задания по теме

1. Вычислите: $\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22,5^\circ$

2. Преобразуйте сумму в произведение и упростите результат, если это возможно:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\sin 50^\circ + \sin 20^\circ;$ | 4) $\cos 160^\circ + \cos 80^\circ;$ | 7) $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha;$ |
| 2) $\cos 28^\circ - \cos 12^\circ;$ | 5) $\sin 83^\circ - \sin 23^\circ;$ | 8) $\sin 10^\circ + \cos 40^\circ;$ |
| 3) $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5};$ | 6) $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12};$ | 9) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{12}.$ |

3. Замените сумму произведением:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\cos 40^\circ - \cos 10^\circ;$ | 4) $\cos 37^\circ + \cos 23^\circ;$ | 7) $\cos 20^\circ - \cos 70^\circ;$ |
| 2) $\sin 42^\circ - \sin 26^\circ;$ | 5) $\sin 130^\circ + \sin 110^\circ;$ | 8) $\sin \beta - \sin 3\beta;$ |
| 3) $\sin \frac{5\pi}{24} + \sin \frac{7\pi}{24};$ | 6) $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12};$ | 9) $\cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{10}.$ |

4. Упростите выражение:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha};$ | 5) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha + \sin 11\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha + \cos 11\alpha};$ |
| 2) $\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x + \sin 3x};$ | 6) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha - \cos 10\alpha + \cos 8\alpha}{\cos 8\alpha - \cos 6\alpha};$ |
| 3) $\frac{\sin 2\beta - \sin 3\beta}{\cos 2\beta - \cos 3\beta};$ | 7) $\frac{\cos \alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin \alpha};$ |
| 4) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + 2\cos^2 \alpha};$ | 8) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin \alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 3\alpha}.$ |

5. Докажите, что

$$1) \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad 2) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

Рекомендуемая литература:

1. Алгебра: Учеб. для 9 кл. сред. шк./Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; Под ред. С. А. Теляковского.- М.: Просвещение, 1990.- 272 с
2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
3. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
4. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.
5. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Запишите формулу косинуса разности двух углов. Выведите из нее формулы косинуса суммы, синуса суммы и синуса разности.
2. Напишите формулы синуса и косинуса двойного угла.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.12 Самостоятельная работа №12 (4 час.)

Тема: Преобразование тригонометрических выражений

Цель: Совершенствование навыков преобразование тригонометрических уравнений.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей теоретического материала и практической работы. После повторения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Справочный материал:

Основные формулы тригонометрии

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно. Пусть α° - градусная мера угла, β - радианная, тогда справедливы формулы:

$$\beta = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot \beta}{\pi}$$

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента.

1.	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$	4.	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
2.	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	5.	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
3.	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	6.	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Формулы сложения.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Формулы двойных и половинных углов.

1.	$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	5.	$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
2.	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	6.	$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
3.	$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	7.	$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$
4.	$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	8.	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Формулы преобразования суммы в произведение.

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	
--	--

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$1 - \cos \alpha = 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$1 + \cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

Формулы преобразования произведения в сумму.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Формулы приведения.

φ	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \varphi$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Пример №1 Найти значение следующих тригонометрических выражений:

$$\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = \frac{4}{5}; 0 < \alpha < \pi.$$

Решение: Выпишем формулы для нахождения $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha$:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\cos^2 = 1 - 2 \cdot \frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Из основного тригонометрического тождества найдем $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5};$$

Далее найдем значения искомых выражений:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7};$$

Ответ: $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \cos 2\alpha = -\frac{7}{25}, \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}.$

Пример № 2 Доказать тождество:

$$\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1;$$

Решение: Приведем левую часть к 1:

$$\begin{aligned} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha &= \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

Пример №3: Вычислить значение выражения:

$$\sin \frac{8\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{29\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\cos \frac{23\pi}{3} \cdot \sin \frac{11\pi}{6}} + 7$$

Решение: Используя формулы приведения, получим:

$$\begin{aligned} &\sin \frac{8\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{29\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\cos \frac{23\pi}{3} \cdot \sin \frac{11\pi}{6}} + 7 = \\ &= \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg} \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\cos \left(8\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)} + 7 = \\ &= \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)} + 7 = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) + \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} + 7 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 4 + 7 = 0. \end{aligned}$$

Итак, значение выражения 0.

Задания по теме

Вариант 1	Вариант 2
1.Вычислите:	1.Вычислите:
а) $\sin \frac{\pi}{3} + 2\cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} 45^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2};$	а) $3\cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \sin 90^\circ;$
б) $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$	б) $\operatorname{tg} (-30^\circ) - \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos(-\pi);$

в) $\cos 1110^0$; г) $\operatorname{tg} 585^0$. 2. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$ 3. Найдите значение выражения: $\frac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$ 4. Упростите выражение: 1) $\sin^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \cos^2 \alpha$ 2) $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot (1 + \sin^2 \alpha)}$ 3) $\cos^2 \alpha - (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha$	в) $\sin 1500^0$; г) $\operatorname{ctg} 930^0$. 2. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. 3. Найдите значение выражения: $\frac{\sin 145^\circ - \sin 125^\circ}{\cos 145^\circ - \cos 125^\circ}$ 4. Упростите выражение: 1) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 2) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ 3) $(\cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$
5. Покажите, что при всех допустимых значениях углов значение выражения не зависит от величины угла: $\sin^2 \alpha (2 + \operatorname{ctg} \alpha)(2 \operatorname{ctg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha$	5. Покажите, что при всех допустимых значениях углов значение выражения не зависит от величины угла: $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} \right) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)$

Рекомендуемая литература:

1. Алгебра: Учеб. для 9 кл. сред. шк./Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; Под ред. С. А. Теляковского.- М.: Просвещение, 1990.- 272 с
2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
3. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
4. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.
5. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Назовите формулу, выражающую связь между синусом и косинусом одного и того же угла.
2. Как зависят знаки тригонометрических функций от координатных четвертей?
3. Дайте определение тангенса и котангенса. При каких значениях угла определены тангенс и котангенс?
4. Запишите формулы приведения для углов $\frac{\pi}{2} + \alpha$ и $\pi - \alpha$.

5. Запишите формулу косинуса разности двух углов. Выведите из нее формулы косинуса суммы, синуса суммы синуса разности

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	Отлично
70 ÷ 89	4	Хорошо
50 ÷ 69	3	Удовлетворительно
менее 50	2	Неудовлетворительно

2.13 Самостоятельная работа №13 (4час.)

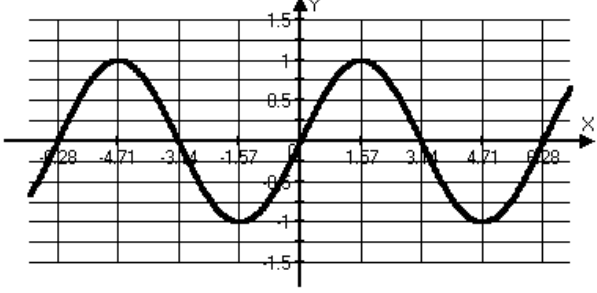
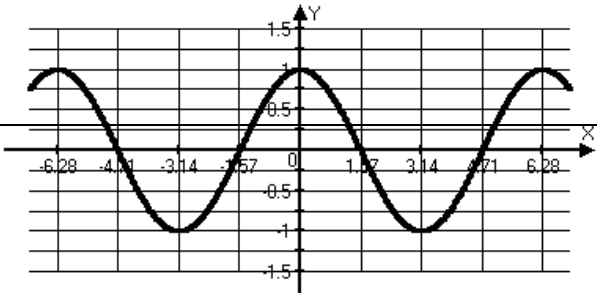
Тема: Тригонометрические функции

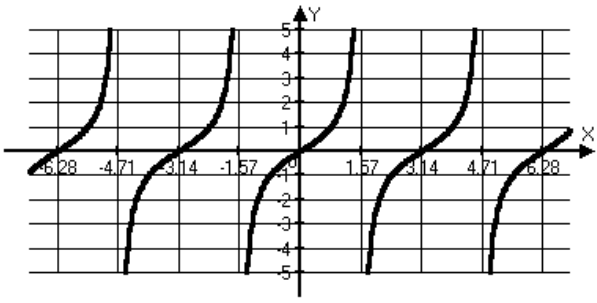
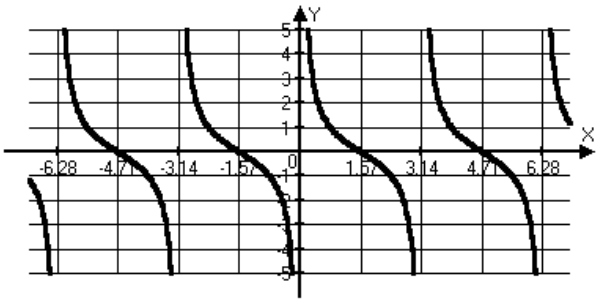
1. *Цель:* систематизировать и закрепить полученные теоретические знания и практические умения обучающихся по теме «Тригонометрические функции».

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Графики и основные свойства тригонометрических функций.

	$y \uparrow$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$
	$y \downarrow$ для $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$
	$y > 0$ для $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$
	$y < 0$ для $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$
$y = \sin x$, $D(y) = R$, $E(y) = [-1, 1]$, период 2π , нечетная	
	$y \uparrow$ для $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$
	$y \downarrow$ для $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$

	$y > 0$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$
	$y < 0$ для $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$
$y = \cos x$, $D(y) = R$, $E(y) = [-1, 1]$, период 2π , четная	
	$y \uparrow$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
	$y > 0$ для $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
	$y < 0$ для $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$
$y = \operatorname{tg} x$, $D(y) = R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$, $E(y) = (-\infty; \infty)$, период π , нечетная	
	$y \downarrow$ для $x \in (2\pi k; \pi + \pi k)$
	$y > 0$ для $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
	$y < 0$ для $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$
$y = \operatorname{ctg} x$, $D(y) = R \setminus \{\pi k\}$, $E(y) = (-\infty; \infty)$, период π , нечетная	

Задания по теме

1. Прочитайте текст учебника и составьте словарь основных понятий по теме «Тригонометрические функции»

- Угол в 1 радиан.
- Единиичная окружность.
- Числовая функция.
- Аргумент функции.
- Область значений функции.
- Целые рациональные функции.
- Дробно-рациональные функции.
- График функции.
- Синус и косинус.
- Синусоида.
- Линия синусов.
- Тангенс и котангенс.
- Линия тангенсов.
- Линия котангенсов.
- Четная функция.
- Нечетная функция.

17. Периодическая функция.

18. Возрастающая функция.

19. Убывающая функция.

20. Экстремум функции.

21. Точка максимума.

22. Точка минимума.

23. Арксинус числа а.

24. Арккосинус числа а.

25. Арктангенс числа а.

26. Арккотангенс числа а.

2. Выполните задания

Вариант 1

1. Найти область определения функции:

1) $y = \sin 2x + \cos x$

2) $y = \operatorname{tg} 2x$

3) $y = \sqrt{\cos 3x}$

4) $y = \arcsin \frac{x-2}{4}$

2. Найти множество значений функции:

1) $y = -2 \sin 2x + 1$

2) $y = 1,6 - 3 \cos^2 x$

3) $y = 1 - 3 \operatorname{tg}^2 x$

4) $y = \pi + 2 \arcsin x$

3. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = 2 \sin \frac{x}{4}$

2) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 4x$

4. Решить графически уравнение. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 2\pi]$:

1) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

2) $1 + 2 \cos x = 0$

3) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$

4) $2 \operatorname{tg} x + 4 = 0$

5. Решить графически неравенство:
 $\sin x \geq \cos x$

Вариант 2

1. Найти область определения функции

1) $y = \sin x + \cos 4x$

2) $y = \operatorname{ctg} 3x$

3) $y = \sqrt{\sin 2x}$

4) $y = \arccos \frac{x+3}{6}$

2. Найти множество значений функции

1) $y = 2 - 3 \cos 4x$

2) $y = 2,7 - 2 \sin^2 x$

3) $y = 3 - 5 \operatorname{ctg}^2 x$

4) $y = 2\pi + 4 \arccos x$

3. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \frac{1}{4} \cos 5x$

2) $y = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{8}$

4. Решить графически уравнение. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$:

1) $2 \sin x + 1 = 0$

2) $\sqrt{3} - 2 \cos x = 0$

3) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

4) $3 \operatorname{tg} x - 6 = 0$

5. Решить графически неравенство:
 $\sin x \leq \cos x$

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.

2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие. - М.; Высш. шк., 1984. - 351 с.

3. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова. - 14-е изд. - М.: Просвещение, 2004. - 384 с

4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., Мнемозина, 2012.

5. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Что такое периодическая функция, период функции?
2. Перечислите основные свойства функции синус.
3. Перечислите основные свойства функции косинус.
4. Перечислите основные свойства функции тангенс
5. Перечислите основные свойства функции котангенс.
6. Определите знаки тригонометрических функций в зависимости от того, в какой четверти находится аргумент.
7. Какие из тригонометрических функций являются четными, какие — нечетными?
8. Чему равен период синуса? косинуса? тангенса? Котангенса

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог

$90 \div 100$	5	Отлично
$70 \div 89$	4	Хорошо
$50 \div 69$	3	Удовлетворительно
менее 50	2	Неудовлетворительно

2.14 Самостоятельная работа №14 (4 час.)

Тема: Решение тригонометрических уравнений и неравенств

Цель: Формирование умений решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

1. Решение тригонометрических уравнений

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется **тригонометрическим**.

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$, $ a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$, $ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$, $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$

Пример № 1 Решите уравнение:

$$a) \cos x = \frac{1}{2}$$

По формуле

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$б) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

По формуле

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

$$x = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

По формуле

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

$$x = \operatorname{arctg} (-1) + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

Методы решения тригонометрических уравнений. Решение

тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида (см. выше) и *решение*

полученного простейшего тригонометрического уравнения. Наиболее часто при решении тригонометрических уравнений применяются следующие методы:

- разложение на множители;
- способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
- сведение к уравнениям, однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций;
- равенство одноименных тригонометрических функций
- введение вспомогательного аргумента.

При этом, как правило, в процессе решения тригонометрического уравнения приходится использовать не один, а несколько из указанных выше методов.

1. Разложение на множители

Пример №2. Решите уравнение: $\sin x + \cos x - \sin x \cos x - 1 = 0$

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $\sin x + \cos x - \sin x \cos x - 1 = 0$

$$\sin x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$$

$$(\sin x - 1)(1 - \cos x) = 0$$

Отсюда следует, что $\sin x - 1 = 0$ или $1 - \cos x = 0$, то есть имеем уравнения

$$\sin x = 1 \text{ или } \cos x = 1 \text{ Решая их, получим } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{N} \text{ или } x = 2\pi n; n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \text{ или } x = 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

2. Алгебраический метод. Этот метод нам хорошо известен из алгебры

(метод замены переменной и подстановки).

Пример №3 Решите уравнение: $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

Решение. $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

$$\cos x = t$$

В результате получим уравнение.

$$t^2 + t - 2 = 0$$
 Его корни

$t_1 = 1$; $t_2 = -2$ то есть получаем уравнения

$$\cos x = 1 \quad \cos x = -2$$

Первое уравнение дает $x = 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$

Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x = 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$

3. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Каждое из уравнений:

$$a \sin x + b \cos x = 0,$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \text{ и т.д.}$$

называется однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней у $\sin x$ и $\cos x$ во всех членах такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Делением на $\cos^n x$, n степень однородного уравнения, оно приводится к уравнению, алгебраическому относительно $\operatorname{tg} x$.

Разделив, например, уравнение $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ на $\cos^2 x$, получим уравнение: $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$. При $a \neq 0$ эти уравнения эквивалентны, так как если $\cos x = 0$, то из первого уравнения получим, что и $\sin x = 0$, что невозможно ($\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же аргументе в нуль не обращаются). Далее из эквивалентного уравнения находим $\operatorname{tg} x$, решая квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, а по значениям $\operatorname{tg} x$ - соответствующие значения x .

Пример № 4 Решите уравнение:

$$\sin 2x = 1 - 3 \cos^2 x$$

Решение: Заменяя $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, получим однородное уравнение:

$$2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x - 3 \cos^2 x,$$

или

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

Деля на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$), получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Вводим новую переменную $y = \operatorname{tg} x$ и получаем квадратное уравнение относительно нее:

$$y^2 - 2y - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Далее получаем равносильную совокупность уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x_1 = 1 + \sqrt{3}, & \begin{cases} x_1 = \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{3}) + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{3}) + \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \\ \operatorname{tg} x_2 = 1 - \sqrt{3}, \end{cases}$$

4. Уравнения, левая часть которых раскладывается на множители, а правая часть равна нулю.

Перенеся все члены любого уравнения в левую часть, его можно привести к виду $f(x) = 0$.

Если левая часть этого уравнения раскладывается на сомножители, то каждый из них приравнивается к нулю, и уравнение распадается на несколько простых уравнений. Очень важно при этом иметь в виду, что корнями первоначального уравнения будут только те из корней полученных уравнений, которые входят в область определения первоначального уравнения.

Пример № 5: Решите уравнение:

$$\cos 5x \cos 2x - \cos 7x \cos 4x = 0.$$

Решение: Используем формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Воспользовавшись этими формулами, получим уравнение:

$$\frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 3x) - \frac{1}{2}(\cos 11x + \cos 3x) = 0$$

$$\text{или } \cos 7x - \cos 11x = 0.$$

Разность косинусов преобразуем в произведение $2 \sin 9x \cdot \sin 2x = 0$, которое равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \sin 9x = 0, & \begin{cases} 9x = \pi n, \\ 2x = \pi k, \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{9}n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2}k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \\ \sin 2x = 0, \end{cases}$$

5. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$.

Эти уравнения можно решать при помощи универсальной тригонометрической

подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, воспользовавшись формулами, выражающими $\sin x$ и

$\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Исходное уравнение сводится к дробно-рациональному алгебраическому уравнению, решение которого нами было рассмотрено ранее.

Такие уравнения рациональнее решать введением вспомогательного угла:

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$. Рассмотрим дальнейший ход решения уравнения путем эквивалентных преобразований левой части:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

Введем обозначения:

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Выражение в скобках в этом случае преобразуется в косинус разности аргументов:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \varphi \cdot \sin x + \cos \varphi \cdot \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Таким образом, исходное уравнение приводится к эквивалентному простейшему тригонометрическому уравнению:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) = c, \quad \text{или} \quad \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{решение которого, суть}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \pm \arccos \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример №6: Решите уравнение:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2.$$

Решение. (первый способ) Заменяя $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получим:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 = 0.$$

Введем новую переменную: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ и получим эквивалентное квадратное уравнение относительно z : $3z^2 - 2\sqrt{3}z + 1 = 0$, у которого дискриминант равен нулю и, следовательно, имеем единственный корень $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Задача свелась к решению уравнения:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. (второй способ). Введем вспомогательный угол:

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ Тогда решение исходного уравнения сразу запишется в виде:

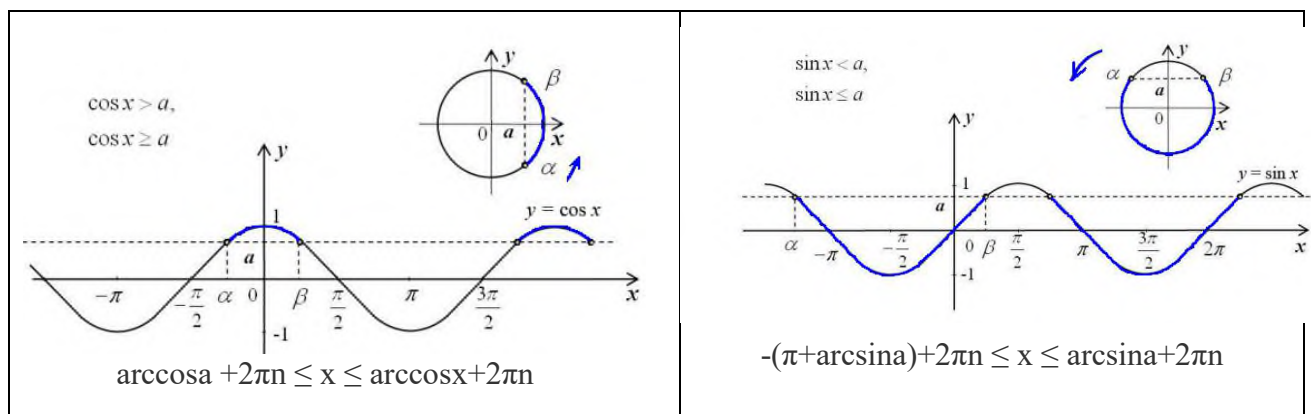
$$x = \frac{\pi}{3} \pm \arccos\left(\frac{2}{2}\right) + 2\pi n = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ получили тот же ответ}$$

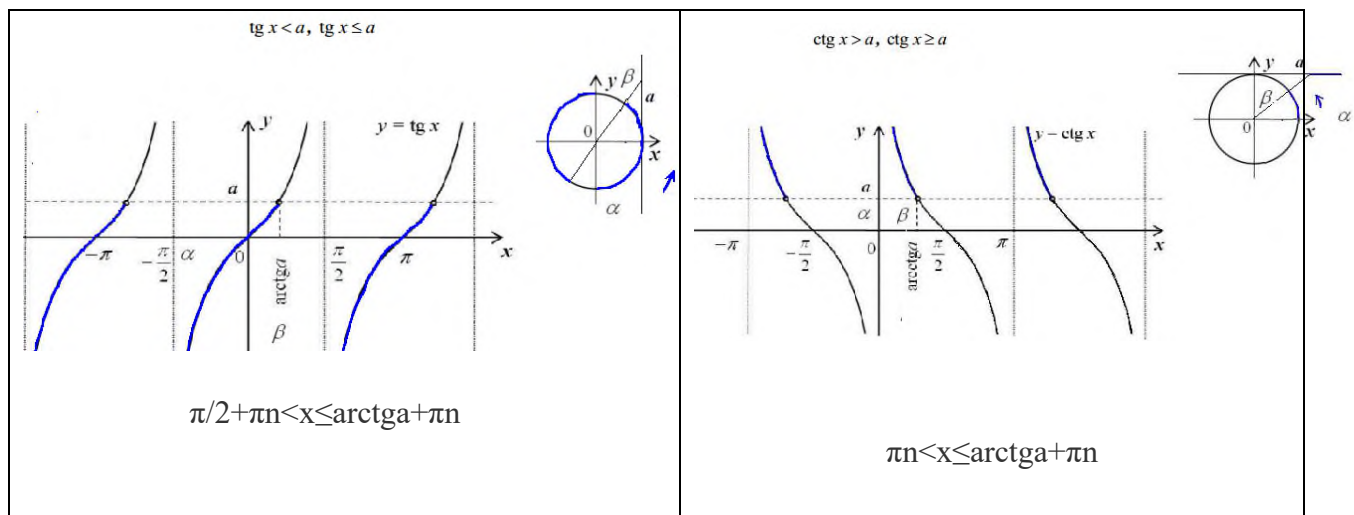
2. Решение тригонометрических неравенств

При решении тригонометрических неравенств используют свойства неравенств, известные из алгебры, а также различные тригонометрические преобразования и формулы. Для решения применяется графический способ. Для нахождения решений можно использовать тригонометрический круг или участок графика тригонометрической функции (например, расположенный возле начала координат). Находятся точки пересечения прямой $y=a$ с тригонометрической окружностью или с графиком тригонометрической функции, и используется периодичность функций.

При описании выделенного промежутка необходимо соблюдать правила:

- 1) движение только против часовой стрелки
- 2) **угол в точке α должен быть меньше угла в точке β**
- 3) углы должны принимать ближайшие последовательные значения



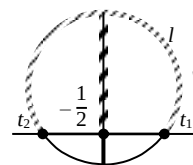


Пример № 7: Решите неравенство $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

Решение. Все решения, удовлетворяющие заданному неравенству, лежат на дуге l . Найдем ее концы:

$$t_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6},$$

$$t_2 = \pi - t_1 = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$



С учетом периода синуса, запишем ответ.

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$

Задания по теме

1 вариант	2 вариант
Решите уравнение: 1. а) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin 3x = -1$ 2. а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ б) $2\cos^2 x + 2\sin x = 2,5$ в) $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$ г) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ д) $1 - \cos 2x = \sin 2x$ е) $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \frac{1}{2}$ 2) Решите неравенство: а) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\operatorname{tg} 3x > \sqrt{3}$	Решите уравнение: 1) а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos 2x = -1$ 2) а) $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$ б) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$ в) д) $\sin 2x + \cos 2x = 0$ г) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ д) $\sin 2x = \cos 2x + 1$ е) $\sin 5x \cos x - \cos 5x \sin x = \frac{1}{2}$ 2) Решите неравенство: а) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos 2x < 0,5$

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.

3. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.
5. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Запишите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.
2. При каких значениях a данные уравнения не имеют решения?
3. Какие уравнения называются однородными и как они решаются?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.15 Самостоятельная работа №15 (4 час.)

Тема: Производная

Цель: Закрепление умений вычислений производных функций.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Производная — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции. Определяется как предел

отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Функцию, имеющую конечную производную, называют дифференцируемой. Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**.

Формулы дифференцирования

y	C	x	x^2	x^n	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
y'	0	1	$2x$	nx^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) - \text{формула сложной функции}$$

Пример: Найдите производные функций: а) $y = 3x^5$, б) $y = \frac{\sin x}{x^4}$; в) $y = \sqrt{3x^2 + 1}$

$$\sqrt{3x^2 + 1}$$

$$\text{а) } y' = (3x^5)' = 3 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 15x^4$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{\sin x}{x^4}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x^4 - (x^4)' \sin x}{(x^4)^2} = \frac{x^4 \cos x - 4x^3 \sin x}{x^8} = \frac{x^3(x \cos x - 4 \sin x)}{x^8} = \frac{(x \cos x - 4 \sin x)}{x^5}$$

$$\text{в) } y' = (\sqrt{3x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 1}} \cdot (3x^2 + 1)' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$$

Задания по теме

Вариант 1	Вариант 1
Найдите производные функций:	
1. а) $f(x) = 4x + 3$; б) $f(x) = 5 - 2x$; в) $f(x) = \frac{1}{5}x - 7$; г) $f(x) = x^2 - 4$; д) $f(x) = 3x^2$	1. а) $f(x) = 6x + 5$; б) $f(x) = 8 - 3x$; в) $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{3}{7}$; г) $f(x) = x^2 - 5$; д) $f(x) = 2x^2$
2. а) $(6x^5 + 4 \cos x - 3)'$; б) $((5x^4 - 3)(\cos x + 8))'$ в) $\left(\frac{4x-5}{3x+7}\right)'$; г) $\left(\frac{\sin x + 2}{\sin x + 5}\right)'$ д) $\left(\frac{1}{9+2x}\right)'$ е) $((\cos x + 2)(\sin x - 8))'$	2. а) $(4\sqrt{x} + 5 \cos x - 2)'$; б) $((9x - 2)(x^7 + 4))'$ в) $\left(\frac{2 \cos x - 9}{4 - \cos x}\right)'$ г) $\left(\frac{6 - 4x}{x + 3}\right)'$ д) $((\cos x + 7)(\sin x - 3))'$; е) $\left(\frac{1}{9x + 2}\right)'$
3. а) $(\cos(3 - x))'$; б) $(\sqrt{4x - 2})'$;	3. а) $((10x - 7)^4)'$; б) $\cos(x + 3)$

$\text{в)} (\sin(x+7))'; \quad \text{г)} ((7x-2)^5)'$ $\text{д)} (tg(6-5x))'; \quad \text{е)} ((x+6)^3)'; \quad \text{з)} \left(\frac{9}{(4-3x)^4}\right)'$	$\text{в)} \sin(5-x)'; \quad \text{г)} (\sqrt{5-7x})'$ $\text{д)} ((7x-2)^5)'; \quad \text{е)} (tg(10-8x))'; \quad \text{з)} \left(\frac{5}{(4-8x)^3}\right)'$
---	--

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.
3. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.
5. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Сформулируйте определение производной функции в точке.
2. Запишите формулы дифференцирования.
3. Как найти производную сложной функции?
4. Чему равны производные тригонометрических функций?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.16 Самостоятельная работа 16 № (4 час.)

Тема Применение производной.

Цель: Закрепление умений применять производные функций при решении задач.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

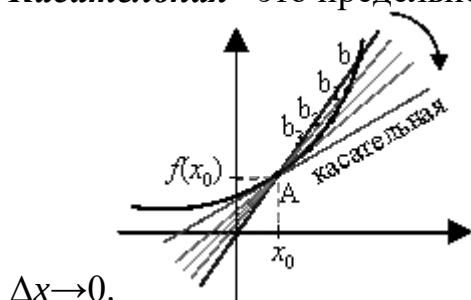
Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

1. Касательная к графику функции.

Возьмем прямую, пересекающую кривую в двух точках: A и b (см.рисунок). Это секущая. Будем поворачивать ее по часовой стрелке до тех пор, пока она не обретет только одну общую точку с кривой. Так мы получим касательную.

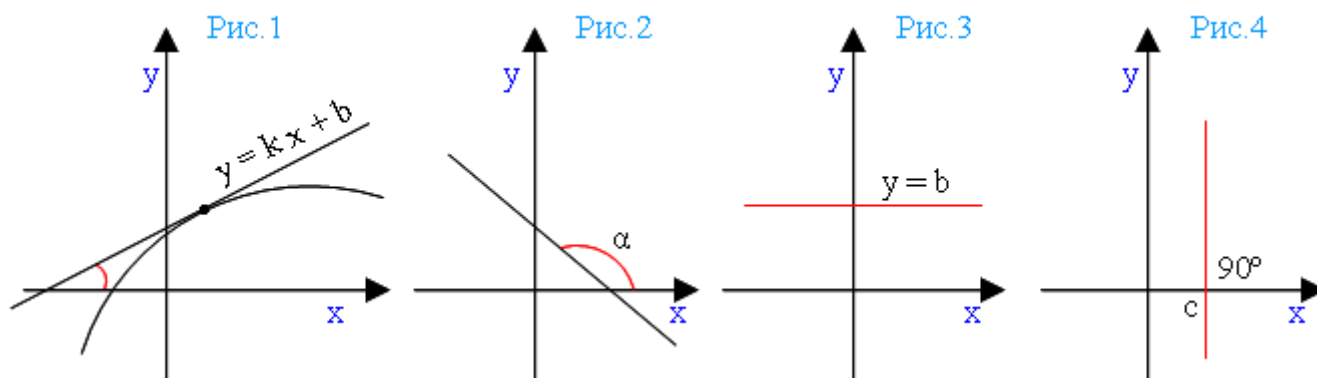
Касательная – это предельное положение секущей при



Коэффициент k является **угловым коэффициентом** этой прямой $y = kx + b$.

Геометрический смысл производной. Угловым коэффициент касательной в точке $(x_0; f(x_0))$ равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс и равен $f'(x_0)$. $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$

Здесь угол α – это угол между прямой $y = kx + b$ и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется **углом наклона** **прямой** (рис.1 и 2).



Если угол наклона прямой $y = kx + b$ острый, то угловым коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1). Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, то угловым коэффициент является отрицательным числом.

График убывает (рис.2). Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угловой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид $y = b$ (рис.3). Если угол наклона прямой равен 90° ($\pi/2$), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством $x = c$, где c – некоторое действительное число (рис.4).

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ - уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Вычислить $f(x_0)$.
2. Найти производные $f'(x)$ и $f'(x_0)$.
3. Подставить найденные числа x_0 , $f(x_0)$, $f'(x_0)$ в уравнение касательной и упростить его.

Пример № 1: Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение: 1) Точка касания x_0 равна 2. Вычислим $f(x_0)$:

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

2) Находим $f'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, $x^2 = 2x$, а $x^3 = 3x^2$. Значит:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x.$$

Теперь, используя полученное значение $f'(x)$, вычислим $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4.$$

3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_0 = 2$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 4$. Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 4 \cdot (x - 2) = 1 + 4x - 8 = -7 + 4x = 4x - 7.$$

Ответ: $y = 4x - 7$.

2. Производная в физике и технике.

Пусть материальная точка движется, причем задан закон движения, т.е. координата x этой точки есть известная функция $x(t)$. Тогда производная от координаты по времени есть скорость, а производная скорости по времени –

ускорение. В этом состоит механический смысл производной функции.

$$v'(t) = x(t) \quad a'(t) = v(t)$$

Пример №2: Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 4 + t^2 + t^3$. Найдите закон скорости её движения, скорость и ускорение в момент времени 2с. (Перемещение измеряется в метрах).

Решение: $v(t) = S'(t) = (4 + t^2 + t^3)' = 2t + 3t^2$; $v(2) = S'(2) = 4 + 3 \cdot 4^2 = 52 \text{ м/с}$. $v'(t) = a(t) = (2t + 3t^2)' = 2 + 6t$; $a(2) = 2 + 6 \cdot 2 = 14 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $v(2) = 52 \text{ м/с}$; $a(2) = 14 \text{ м/с}^2$

3. Применение производной к исследованию функции.

Исследование функции на возрастание и убывание.

Если точка x_0 является **точкой экстремума** функции f и в этой точке существует производная $f'(x)$, то она равна 0. $f'(x_0) = 0$. (**Необходимое условие экстремума**)

Достаточные признаки возрастания, убывания функции:

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I , то функция $f(x)$ возрастает на I .

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I , то функция $f(x)$ убывает на I .

Признак максимума функции.

Если функция f непрерывна в точке x_0 а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является **точкой максимума** функции f .

Признак минимума функции.

Если функция f непрерывна в точке x_0 а $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является **точкой минимума** функции f .

Алгоритм определения промежутков возрастания и убывания функции:

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Найти точки в которых производная равна 0.
4. Отметить на числовой прямой область определения функции и точки. В которых производная равна 0 или не существует.
5. Расставить знаки производной в каждом полученном промежутке.
6. Отметить стрелками возрастание и убывание функции.
7. Записать ответ.

Пример № 3 Определить промежутки возрастания и убывания точки экстремума функции $f(x) = 3x - x^3$

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2. $f'(x) = (3x - x^3)' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$

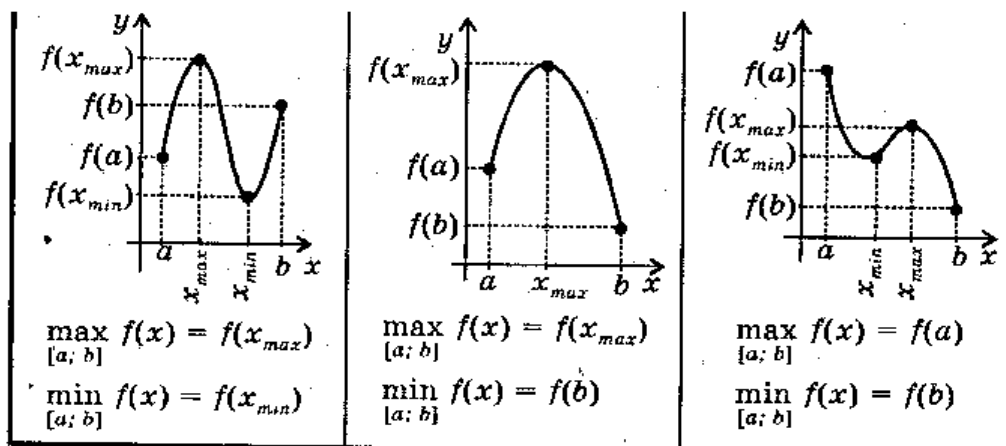
3. $f'(x) = 0$; $3(1 - x)(1 + x) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

$$\begin{array}{ccccccc} f'(x) & & - & -1 & + & 1 & - \\ & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ f(x) & & & & & & \end{array} \rightarrow x \quad f'(-2) < 0; f'(0) > 0; f'(2) < 0;$$

Ответ: $f(x)$ возрастает на промежутке $[-1; 1]$; $f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.

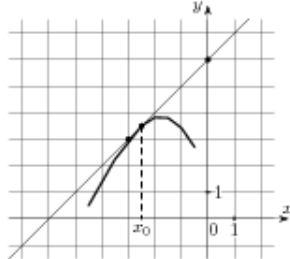
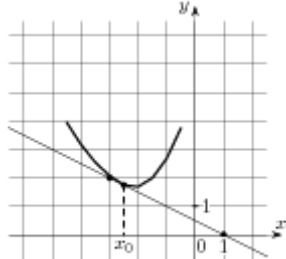
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке в стационарных или критических точках, принадлежащих отрезку, или на его концах.



Алгоритм нахождения:

Этапы	<i>Пример № 4:</i> Для функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
2. Найти стационарные или критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $6x^2 - 6x - 36 = 0$ Критических точек нет, стационарные: $x = -2, x = 3$ Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только одна: $x = 3$
3. Вычислить значения функции в стационарных, критических точках и на концах отрезка.	3) $f(0) = 5$ $f(3) = -76$ $f(4) = -59$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее	$\max_{[0; 4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min_{[0; 4]} f(x) = f(3) = -76$

Задания по теме

Вариант 1	Вариант 2
1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0. 	1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0. 
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 2x^2$ в точке	2. Напишите уравнение касательной к

с абсциссой $x = -3$. Выполните рисунок.	графику функции $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$. Выполните рисунок.
3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -2t^3 + 16t$ (x измеряется в метрах, t – в секундах). Найдите ее скорость и ускорение в момент времени $t = 2$. 4. Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью v_0 , движется по закону $h(x) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где t – время в секундах. Найдите наибольшую высоту, которой достигнет тело, если $v_0 = 60 \text{ м/с}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$.	3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 12t - 3t^3$ (x измеряется в метрах, t – в секундах). Найдите ее скорость и ускорение в момент времени $t = 1$. 4. Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью v_0 , движется по закону $h(x) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где t – время в секундах. Найдите наибольшую высоту, которой достигнет тело, если $v_0 = 40 \text{ м/с}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$.
5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции и определите ее точки экстремума: а) $f(x) = 4x + 1$; б) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; в) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$.	5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции и определите ее точки экстремума: а) $f(x) = 3x + 6$; б) $f(x) = x^2 - 5x + 5$; в) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 3$.
6. Разбейте число 10 на два неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых была наименьшей.	6. Разбейте число 18 на два неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение квадрата первого слагаемого и второго слагаемого было наибольшим.

Рекомендуемая литература:

1. Завич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.
2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие. - М.; Высш. шк., 1984. - 351 с.
4. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова. - 14-е изд. - М.: Просвещение, 2004. - 384 с
5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.
6. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции в точке.
2. Назовите алгоритм исследования функции на возрастание и убывание.
3. Какую прямую называют касательной к графику функции в точке?
4. В чем состоит геометрический смысл производной?
5. Как найти скорость и ускорение тела в определенный момент времени?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.17 Самостоятельная работа 17 № (4 час.)**Тема Первообразная и интеграл.**

Цель: Формирование умений находить первообразные функций при решении задач.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

функция	k	$2x$	x^n	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
первообразная	$kx+C$	x^2+C	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$2\sqrt{x}+C$	$-\frac{1}{x}+C$	$-\cos x+C$	$\sin x+C$	$\operatorname{tg} x+C$	$-\operatorname{ctg} x+C$

Площадь криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Задания по теме

Вариант 1

A1. Выберите первообразную для функции $f(x) = 4x - 1$.

- 1) $F(x) = 16x^2 - x$ 2) $F(x) = 2x^2$ 3) $F(x) = 2x^2 - x + 1$ 4) $F(x) = 16x^2$

A2. Какая из данных функций не является первообразной для функции $f(x) = \sin 2x$?

- 1) $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$ 2) $F(x) = 2 - \frac{1}{2} \cos 2x$ 3) $F(x) = -2 \cos 2x$ 4) $F(x) = 4 - \frac{1}{2} \cos 2x$

A3. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = -5$.

- 1) $-5x + C$ 2) $-5x$ 3) $-5 + C$ 4) $5x + C$

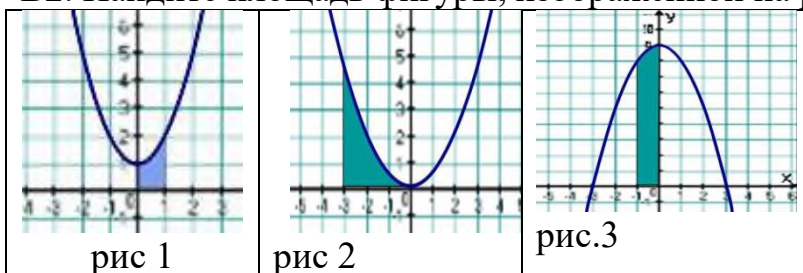
A4. Вычислите интеграл $\int_0^{\pi} \cos x dx$. 1) π 2) 0 3) 1 4) 2

A5. Вычислите интеграл $\int_{-1}^1 x^6 dx$. 1) $\frac{2}{7}$ 2) 0 3) $\frac{1}{7}$ 4) 1

A6. Вычислите интеграл $\int_1^2 \frac{24dx}{x^2}$. 1) 9 2) -7 3) 8 4) 7

B1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

B2. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 1; рисунке 2; рисунке 3.



Вариант 2

A1. Выберите первообразную для функции $f(x) = 2 - x$.

- 1) $F(x) = 2x - 2x^2$ 2) $F(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$ 3) $F(x) = 2 - x^2$ 4) $F(x) = -0,5x^2$

A2. Какая из данных функций не является первообразной для функции $f(x) = \cos 3x$?

- 1) $F(x) = 2 + \frac{1}{3} \sin 3x$ 2) $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$ 3) $F(x) = 2 - \frac{1}{3} \sin 3x$ 4) $F(x) = 4 + \frac{1}{3} \sin 3x$

A3. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = -5$.

- 1) $-5x + C$ 2) $-5x$ 3) $-5 + C$ 4) $5x + C$

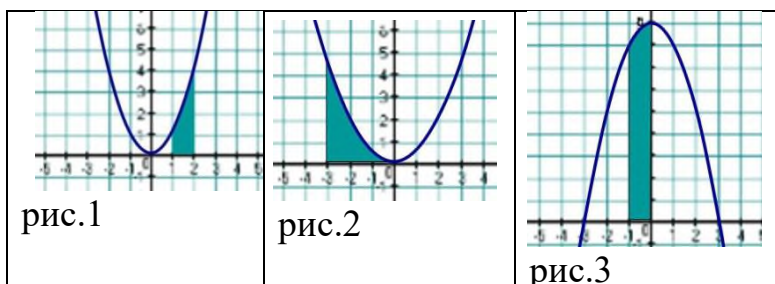
A4. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$. 1) $\frac{\pi}{2}$ 2) 0 3) 1 4) 2

A5. Вычислите интеграл $\int_{-1}^0 x^5 dx$. 1) $-\frac{1}{6}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $-\frac{1}{6}$

A6. Вычислите интеграл $\int_1^2 \frac{16 dx}{x^3}$. 1) $\frac{11}{4}$ 2) $\frac{15}{4}$ 3) $\frac{13}{4}$ 4) $\frac{17}{4}$

B1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

B2. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 1.



Рекомендуемая литература:

1.Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.

2..Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.

3.Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.

4. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с

5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., Мнемозина, 2012.

6. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Сформулируйте определение первообразной.
2. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
3. Сформулируйте три правила нахождения первообразной.
4. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.18 Самостоятельная работа № 18 (3 час.)

Тема: Многогранники и их поверхности.

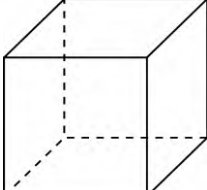
Цель: Формирование умений по нахождению площадей боковой и полной поверхности призмы, пирамиды, параллелепипеда и применять их при решении задач.

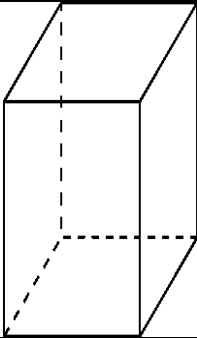
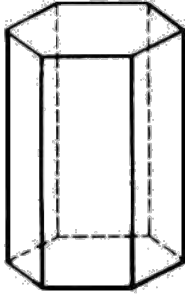
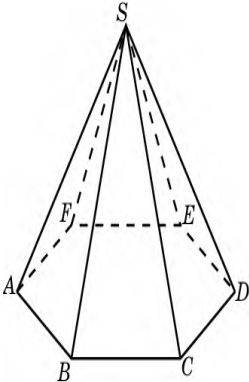
Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Основные формулы

№п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1	Куб		$S_{\text{п}} = 6a^2$ $S_{\text{б}} = 4a^2$

2	Прямоугольный параллелепипед		$S_{\pi} = 2ab + 2ac + 2ac$ $S_{\text{б}} = +2ac + 2ac$
3	Призма		$S_{\text{б}} = p \cdot H$ $S_{\pi} = S_{\text{б}} + 2S_o$
4	Пирамида		$S_{\text{б}} = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_{\pi} = S_{\text{б}} + S_o$

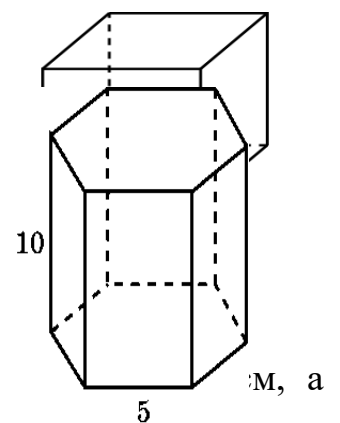
Задания по теме

Решите самостоятельно.

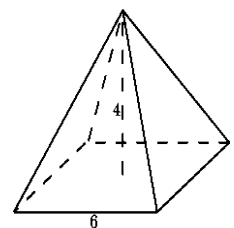
Вариант 1

1. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?

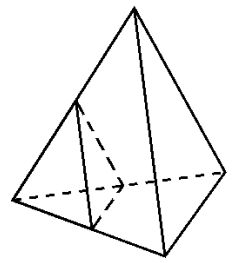
2. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 высота 10 см.



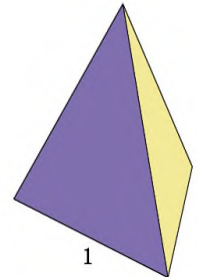
Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота 4 см.



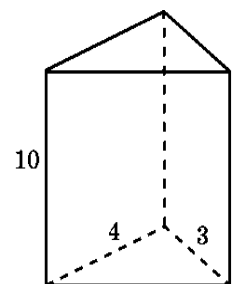
3. Как изменятся площади боковой и полной поверхностей пирамиды, если все её рёбра: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?



4. Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1?

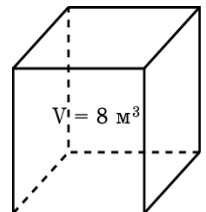


5. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.

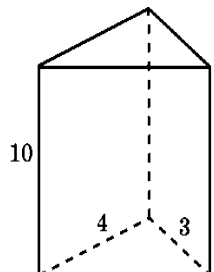


Вариант 2

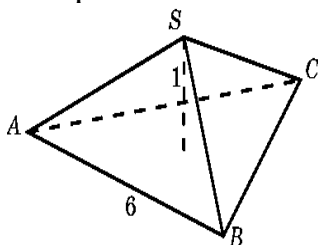
1. Объем куба равен 8 м^3 . Найдите площадь его поверхности.



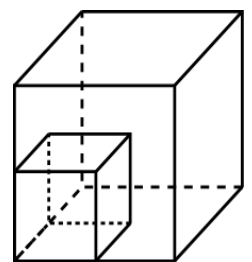
2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.



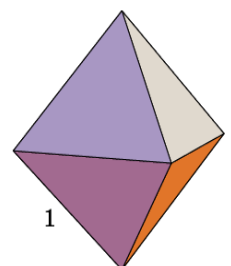
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см.



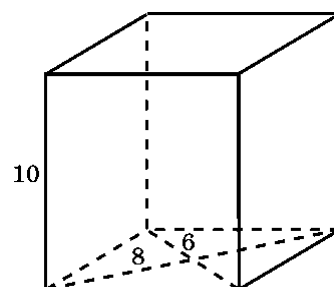
4. Как изменится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?



5. Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?



6. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см и боковым ребром 10 см.



Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
3. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.19 Самостоятельная работа № 19 (2 час.)

Тема Правильные многогранники.

Цель: Закрепить понятие правильных многогранников, при изготовлении моделей, используя развертки

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Многогранник называется **правильным**, если:

1. он выпуклый;

2. все его грани являются равными правильными многоугольниками;
3. в каждой его вершине сходится одинаковое число рёбер

Названия правильных многогранников пришли из Греции. В дословном переводе с греческого "тетраэдр", "октаэдр", "гексаэдр", "додекаэдр", "икосаэдр" означают: "четырёхгранник", "восьмигранник", "шестигранник". "двенадцатигранник", "двадцатигранник". Этим красивым телам посвящена 13-я книга "Начал" Евклида. Их еще называют телами Платона, т.к. они занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания. Четыре многогранника олицетворяли в ней четыре сущности или "стихии". Тетраэдр символизировал огонь, т.к. его вершина устремлена вверх; икосаэдр - воду, т.к. он самый "обтекаемый"; куб - землю, как самый "устойчивый"; октаэдр - воздух, как самый "воздушный". Пятый многогранник, додекаэдр, воплощал в себе "все сущее", символизировал все мироздание, считался главным.

Рис.1
из

Многогранник	Вершины	Рёбра	Грани
тетраэдр	4	6	4
куб	8	12	6
октаэдр	6	12	8
икосаэдр	12	30	20
додекаэдр	20	30	12

Одним
способов

изготовления правильных многогранников является способ с использованием, так называемых, развёрток. Если модель поверхности многогранника изготовлена из гибкого нерастяжимого материала (бумаги, тонкого картона и т. п.), то эту модель можно разрезать по нескольким рёбрам и развернуть так, что она превратится в модель некоторого многоугольника. Этот многоугольник

называют развёрткой поверхности многогранника. Для получения модели многогранника удобно сначала изготовить развёртку его поверхности. При этом необходимыми инструментами являются клей и ножницы.

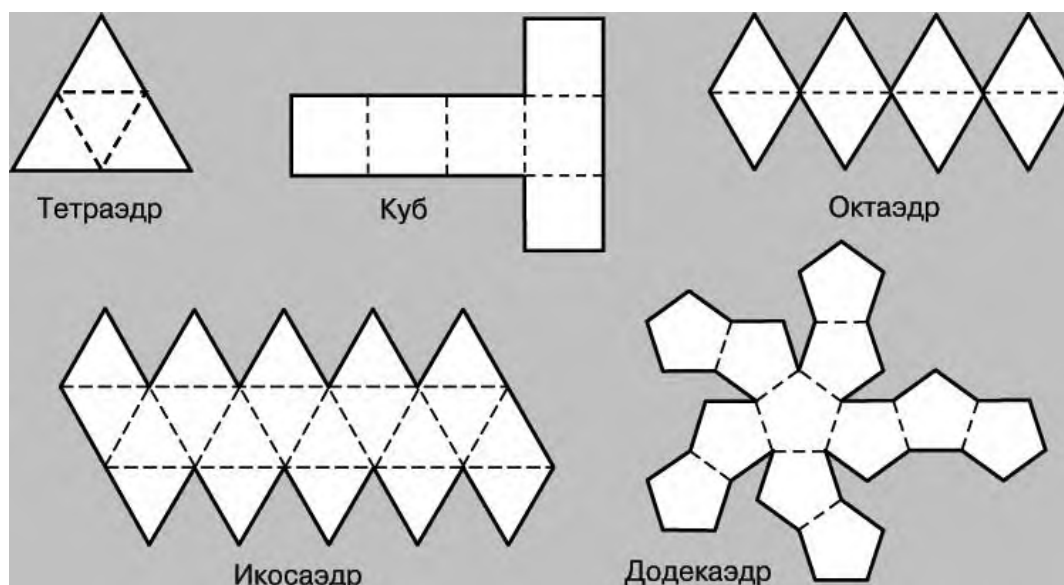


Рис.2

Задания по теме

На рисунке 2 изображены развертки тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра. Перерисуй их на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте и склейте правильные многогранники.

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Геометрия 10 класс. Составители Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. – Волгоград, «Учитель», 2002.
3. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
4. Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Какой многогранник называется правильным? Перечислите все правильные многогранники.
2. Что такое Эйлера характеристика правильных многогранников?
3. Какое место занимают многогранники в философской картине мира Платона?
4. Какое наименьшее число ребер может иметь многогранник?
5. Сколько осей симметрии имеет а) параллелепипед; б) правильный треугольник; в) куб?
6. Сколько плоскостей симметрии, проходящих через данную вершину, имеет правильный тетраэдр?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется при условии правильного, и аккуратно сделанных 5 моделей правильных многогранников.

Оценка «хорошо» - выставляется при условии правильного, и аккуратно сделанных 4 моделей правильных многогранников или при выполнении 5 моделей допущены несущественных ошибки.

Оценка «удовлетворительно» - ставится в том случае, если сделаны 3 модели правильных многогранников или 4 модели сделаны неаккуратно

Оценка «неудовлетворительно» - сделано меньше трех макетов правильных многогранников. В случае получения данной оценки студент обязан выполнить работу заново.

2.20 Самостоятельная работа № 20 (4час.)

Тема: Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

Цель: Формирование умений сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число при решении задач.

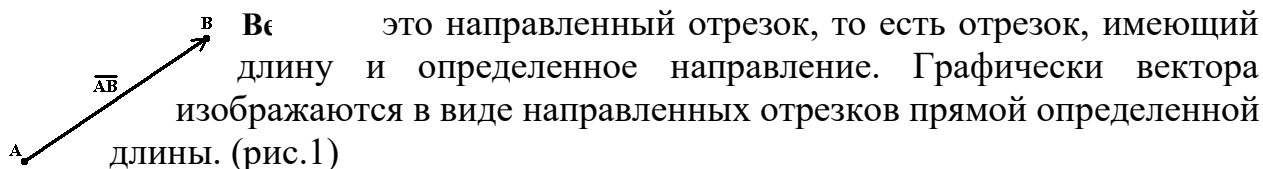
Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Понятие вектора и его обозначения

Многие физические понятия такие, как скорость и ускорение тела, внешняя сила, приложенная к телу, электрические и магнитные поля и многие другие несут в себе информацию как о численном значении того или иного понятия, так и о направлении (в пространстве), ассоциируемом с этим понятием. Такие понятия удобно обозначать одним символом и называются они **векторами**.

Рис.1



Графически вектор изображается направленным отрезком (стрелкой), показывающим направление вектора, а длина отрезка дает его **величину (длину, модуль, абсолютное значение)**. В векторе важны две его точки: **начала вектора**

A и конца вектора B . Этот вектор можно обозначить $\overrightarrow{AB}$ или просто $\vec{a}$, а длину вектора $|\vec{a}|$.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают.

Длина нулевого вектора равна нулю.

Сложение и вычитание векторов

В алгебре векторов определены операции сложения, вычитания и умножения. Понятие *деления на вектор не существует*. Для построения векторной алгебры договорились два вектора считать равными, если они имеют одно и то же направление и длины их равны. При этом не имеет значения, в разных точках или в одной и той же точке векторы берут свое начало. Другими словами, если векторы при параллельном переносе совмещаются, то они равны.

Сложение векторов

Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют коллинеарными векторами (рис. 3).

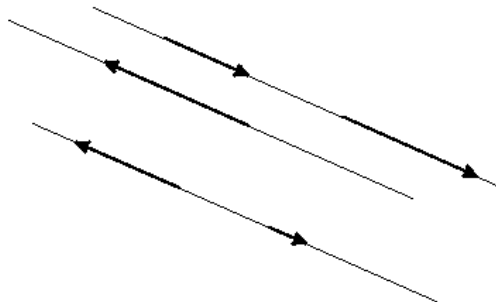


рис. 3

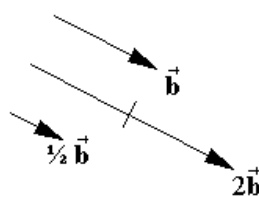
Два коллинеарных вектора a и b называются **сонаправленными векторами**, если их направления совпадают: $a \uparrow b$ (рис. 4).



Рис.4

Два коллинеарных вектора a и b называются **противоположно направленными векторами**, если их направления противоположны: $a \updownarrow b$ (рис. 4).

При умножении вектора на положительное число величина вектора увеличивается или уменьшается на это число без изменения направления вектора. На этом рисунке вектор $\vec{b}$ умножен на 0.5 и на 2. При умножении вектора на отрицательное число направление вектора меняется на



противоположное, величина же вектора увеличивается или уменьшается на абсолютную величину числа.

Задания по теме

1 вариант

1. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите вектор начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1 D_1}$; б) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1 B}$

2. Используя правило многоугольника, упростите выражение:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{KD}.$$

3. Пусть $AB = 5$, $BC = 12$, угол $B = 90^\circ$. Найдите величины

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| \text{ и } |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|.$$

4. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите величину

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}|.$$

5. Диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . Найдите число k такое, что $\overrightarrow{AO} = k \overrightarrow{CD_1}$.

Вариант 2

1. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите вектор начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$

2. Используя правило многоугольника, упростите выражение:

$$\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{KD}.$$

3. Пусть $AB = 15$, $BC = 8$, угол $B = 90^\circ$. Найдите величины

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| \text{ и } |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|.$$

4. Диагонали ромба $ABCD$ равны 10 и 24. Найдите величину

$$|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}|.$$

5. Диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . Найдите число k

такое, что $\overrightarrow{AC_1} = k \overrightarrow{AO}$.

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
3. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Справедливо ли утверждение: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены?
2. Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?
3. Может ли длина суммы нескольких ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?
4. Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?
5. Коллинеарны ли векторы: $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.21 Самостоятельная работа № 21 (4час.)

Тема: Координаты и векторы в пространстве. Использование векторов при решении математических задач

Цель: Формирование умений решать задачи с использованием действий над векторами в координатной форме.

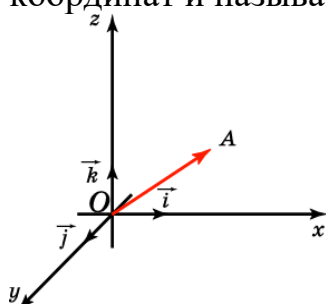
Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Теоретический материал

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора. Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x, y, z\}$ тогда он может быть представлен в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

и

№п/п	Название операции	Формулы
1	сумма векторов	если $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ $\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$
2	Разность векторов	$\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$
3	Произведение вектора на число	$\delta\vec{a}\{\delta x; \delta y; \delta z\}$
4	Вычисление координаты середины отрезка	Точка C- середина отрезка AB. $C(x_c; y_c; z_c)$ $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$
5	Нахождение	$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

	координаты вектора	
6	Нахождение длины вектора	$ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7	Вычисление скалярного произведения векторов	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
8	Нахождение косинуса угла между векторами	$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
9	Условие коллинеарности двух векторов	$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$
10	Условие перпендикулярности векторов	$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$

Задания по теме

Вариант 1

- (4) Даны точки $A(5; -1; 3)$ и $B(2; -2; 4)$. Найдите:
 - координаты вектора $\overrightarrow{AB}$,
 - длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
 - координаты середины отрезка AB ;
 - разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по единичным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- (2) Даны векторы $\vec{b} \{3; 1; -2\}$ и $\vec{c} \{1; 4; -3\}$. Найдите длину вектора $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{c}$.
- (4) Постройте систему координат $Oxyz$ и постройте точку $A(1; -2; -4)$. Найдите расстояние от этой точки до координатных плоскостей, осей и начала координат.
- (3) Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; E и F – середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
 - сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;
 - противоположно направлены вектору $\overrightarrow{AB_1}$;
 - имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{A_1 C_1}$;

5. (4) Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; E и F – середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Выразите векторы $\overrightarrow{BF}$ и $\overrightarrow{ED}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Вариант 2

- (4) Даны точки $C(6; 3; -2)$ и $D(2; 4; -5)$. Найдите:
 - координаты вектора $\overrightarrow{CD}$,
 - длину вектора $\overrightarrow{CD}$;
 - координаты середины отрезка CD ;
 - разложите вектор $\overrightarrow{CD}$ по единичным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- (2) Даны векторы $\vec{a}\{5; -1; 2\}$ и $\vec{b}\{3; 2; -4\}$. Найдите длину вектора $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
- (4) Постройте систему координат $Oxyz$ и постройте точку $B(1; -2; -4)$. Найдите расстояние от этой точки до координатных плоскостей, осей и начала координат.
- (3) Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; K и M – середины ребер AD и DD_1 соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
 - сонаправлены с вектором $\overrightarrow{DC_1}$;
 - противоположно направлены вектору $\overrightarrow{KM}$;
 - имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{A_1 B}$;
- (4) Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; K и M – середины ребер AD и DD_1 соответственно; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Выразите векторы $\overrightarrow{B_1 M}$ и $\overrightarrow{KC_1}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Рекомендуемая литература:

- Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
- Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
- Интернет ресурсы

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

- Первая и вторая координаты ненулевого вектора равны нулю. Как располагается этот вектор по отношению к координатным осям?
- Первая координата ненулевого вектора равны нулю. Как располагается этот вектор по отношению к координатным плоскостям?
- Коллинеарны ли векторы $\vec{a}\{-5; 3; -1\}$, $\vec{b}\{6; -10; -2\}$?
- Длина вектора $\vec{a}$ равна 3. Может ли одна из его координат равняться: 3; 5?
- При каком условии скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а)

положительно; б) отрицательно; в) равно нулю?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Набранное количество баллов	оценка
6 – 9 баллов	3
10 - 13 баллов	4
Более 14 баллов	5

С
а
м

2.22 Самостоятельная работа № 22 (4час.)

Тема: Уравнение прямой на плоскости.

Цель: Формирование умений составления уравнения прямой на плоскости, применять это при решении задач.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Прямая может быть задана:

- точкой и направлением;
- точкой и перпендикулярным прямой вектором;
- двумя точками;
- отрезками, которые прямая отсекает на осях координат (частный случай задания прямой двумя точками).

Правило составления уравнения прямой l , для которой координаты точки $M_1(x_1; y_1)$ и задано какое-либо второе условие:

1. На прямой l выбирают произвольную точку с текущими координатами:
 $M(x; y) \in l$.
2. Находят координаты вектора, лежащего на прямой l :
 $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$
3. Записывают координаты вектора, заданного дополнительными условиями (коллинеарности, перпендикулярности, двумя точками), т.е. направляющего или нормального вектора $\vec{n}$.
4. Используют условие коллинеарности или перпендикулярности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$.

1) Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный нормальный вектор

Дано: $M_1(x_1; y_1) \in l$; $\vec{n} = (A; B)$ - нормальный вектор

Составить уравнение прямой l .

Решение:

$$1) M_1(x_1; y_1) \in l$$

$$2) \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1) \in l$$

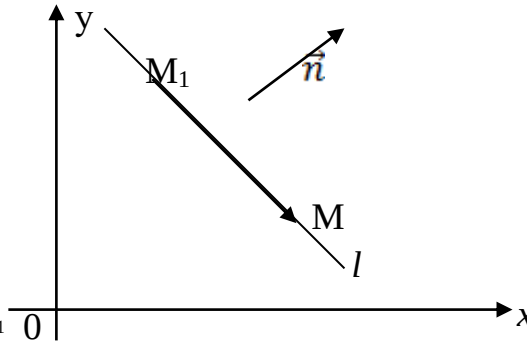
$$3) \vec{n} = (A; B) \text{ - нормальный вектор}$$

$$4) \overrightarrow{M_1M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} * \vec{n} = 0$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

$$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0$$

$$Ax + By + C = 0, \text{ если } C = -Ax_1 - By_1$$



Пример 1:

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(7; -8)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (-2; 3)$.

Решение:

$$1) M(x; y) \in l$$

$$2) \overrightarrow{M_1M} = (x - 7; y + 8) \in l$$

$$3) \vec{n} = (-2; 3) \text{ - нормальный вектор}$$

$$4) \overrightarrow{M_1M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} * \vec{n} = 0 \text{ (условие перпендикулярности векторов)}$$

$$-2(x - 7) + 3(y + 8) = 0$$

$$-2x + 3y + 38 = 0 \text{ - уравнение искомой прямой}$$

Замечание:

Чтобы найти угловой коэффициент прямой, нужно выразить переменную y через x .

Например:

$$-2x + 3y + 38 = 0$$

$$3y = 2x - 38$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{38}{3}$$

$$k = \frac{2}{3} \text{ - угловой коэффициент прямой, заданной уравнением } -2x + 3y + 38 = 0$$

2) Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный направляющий вектор

Дано: $M_1(x_1; y_1) \in l$; $\vec{q} = (a; b)$ - направляющий вектор

Составить уравнение прямой l .

Решение:

$$1) M_1(x_1; y_1) \in l$$

$$2) \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1) \in l$$

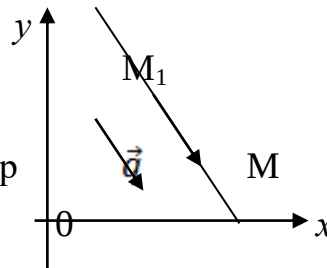
$$3) \vec{q} = (a; b) \text{ - направляющий вектор}$$

$$4) \overrightarrow{M_1M} \parallel \vec{q} \Rightarrow \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

$$b(x - x_1) = a(y - y_1)$$

$$bx - bx_1 - ay + ay_1 = 0$$

$$bx - ay + (-bx_1 + ay_1) = 0$$



приведём уравнение к стандартному виду: $Ax + By + C = 0$, где $A = b$

$$B = -a$$

$$C = -bx_1 + ay_1$$

Пример 2:

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(3;-2)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{q} = (-5;3)$.

Решение:

$$1) M(x;y) \in l$$

$$2) \overrightarrow{M_1M} = (x - 3; y + 2) \in l$$

$$3) \vec{q} = (-5;3) - \text{направляющий вектор}$$

$$4) \overrightarrow{M_1M} \parallel \vec{q} \Rightarrow \frac{x-3}{-5} = \frac{y+2}{3} \text{ (условие коллинеарности векторов)}$$

$$3x - 9 = -5y - 10$$

$$3x + 5y - 9 + 10 = 0$$

$$3x + 5y + 1 = 0 - \text{уравнение искомой прямой}$$

3) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Дано: $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ Составить уравнение прямой M_1M_2 .

Решение:

$$1) M(x;y) \in M_1M_2$$

$$2) \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1) \in M_1M_2$$

$$3) \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) - \text{направляющий вектор}$$

$$4) \overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \text{ (привести уравнение к виду } Ax + By + C = 0)$$

Пример 3:

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;3)$ и $B(7;5)$

Решение:

$$1) M(x;y) \in AB$$

$$2) \overrightarrow{AM} = (x - 2; y - 3) \in AB$$

$$3) \overrightarrow{AB} = (7-2; 5-3) = (5;2) - \text{направляющий вектор}$$

$$4) \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{2}$$

$$2(x-2) = 5(y-3)$$

$$2x - 4 - 5y + 15 = 0$$

$$2x - 5y + 11 = 0 - \text{уравнение искомой прямой}$$

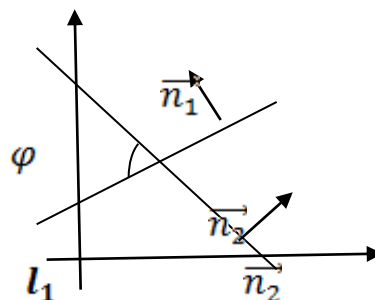
Угол между прямыми

Углом между двумя прямыми называется величина меньшего из углов, образованных этими прямыми.

Угол между двумя прямыми можно найти по формуле:

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}}; \text{ где } \vec{n}_1; \vec{n}_2 - \text{нормальные векторы}$$

прямых l_1 и l_2



Эта формула удобна для вычисления угла между прямыми, заданными их уравнениями.

Пример 4:

Найти угол между прямыми $x + 5y - 3 = 0$ и $2x - 3y + 4 = 0$.

Решение:

$$l_1: \vec{n}_1 = (1; 5) \quad l_2: \vec{n}_2 = (2; -3)$$

$$1) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -13;$$

$$2) |\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26};$$

$$3) |\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$4) \cos \varphi = \frac{|-13|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

$$5) \varphi = 45^\circ \text{ (по таблицам Брадиса)}$$

Ответ: 45°

Угол между векторами $\vec{a} = (x_1; y_1); \vec{b} = (x_2; y_2)$ вычисляют по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

где:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \text{ (скалярное произведение векторов)}$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$$

$$3) |\vec{b}| = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

Замечание:

✓ Если $\cos \varphi > 0$, то -острый угол (находим по таблице Брадиса)

✓ Если $\cos \varphi = 0$, то $\varphi = 90^\circ$

✓ Если $\cos \varphi < 0$, то -тупой угол

Например, $\cos \varphi = -0,7071$, тогда $\varphi = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, где 45° нашли по таблице Брадиса по числу 0,7071.

Задания по теме

№1

Даны координаты точек А, В, С:

Вариант I. А(-1; 4; 1), В(4; 5; 1), С(2; 9; 5)

Вариант II. А(1; -3; 0), В(4; 4; 1), С(8; 2; -3)

Вариант III. А(2; 0; -2), В(8; 6; -1), С(4; -5; 8)

Вариант IV. А(2; 0; 0), В(7; 1; 0), С(5; -3; 5)

Определите угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

№2

Даны вершины треугольника ABC:

Вариант I. А(-6; 1), В(6; 10), С(4; -4)

Вариант II. А(-3; 0), В(9; 9), С(7; -5)

Вариант III. А(0; -4), В(5; 4), С(-1; 1)

Вариант IV. А(4; 3), В(-3; -4), С(4; -3)

Найти:

а) длину стороны АВ;

б) уравнение стороны АВ и её угловой коэффициент;

с) внутренний угол А (в градусах);

д) уравнение высоты СД.

III. Сделайте выводы о проделанной работе

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
3. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
2. Как составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{q}=(a;b)$?
3. Как составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(A;B)$?
4. Как составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$?
5. Запишите уравнение прямой в отрезках.
6. Как найти угол между прямыми?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.23 Самостоятельная работа № 23 (4час.)

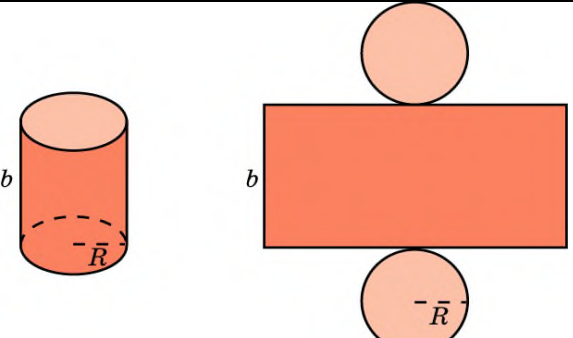
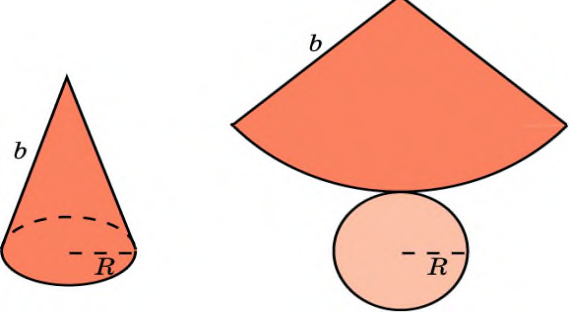
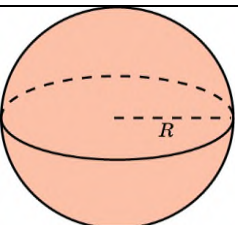
Тема: Площади поверхности и объем фигур вращения

Цель: Формирование умений вычисления площадей поверхности фигур вращения и уметь применять их при решении задач.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

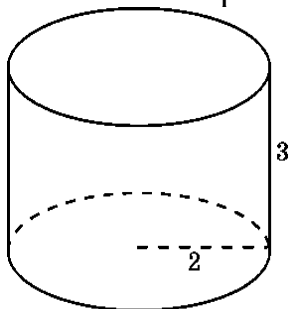
Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

№п/п	Наименование фигуры	Изображение	Формула площадей полной и боковой поверхности
1	Цилиндр		$S_{\text{б}} = 2\pi RH$ $S_{\text{п}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $S_{\text{о}} = \pi R^2$ $V = \pi R^2 \cdot H$
2	Конус		$S_{\text{б}} = \pi Rl$ $S_{\text{п}} = \pi Rl + \pi R^2$ $S_{\text{о}} = \pi R^2$ $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$
3	Сфера, шар		$S_{\text{п}} = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

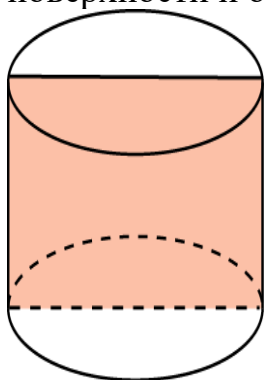
Задания по теме

Вариант 1

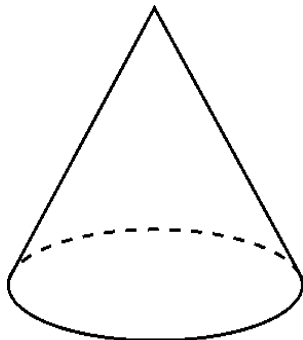
1. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра.



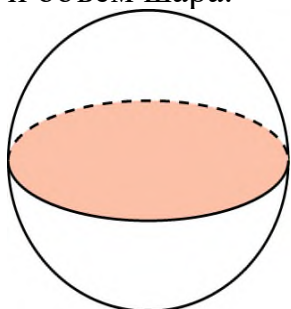
2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2 . Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра.



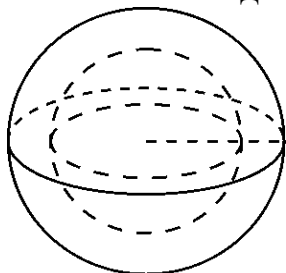
3. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника вокруг его неравных сторон. Равны ли у этих цилиндров площади: а) боковых; б) полных поверхностей?; в) объемы?
4. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.



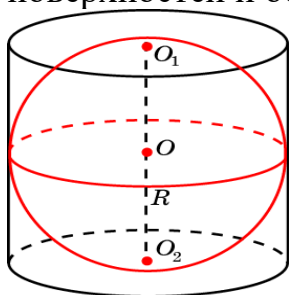
5. Площадь большого круга шара равна 3 см^2 . Найдите площадь поверхности и объем шара.



6. Площади поверхностей двух шаров относятся как $4 : 9$. Найдите отношение их диаметров.



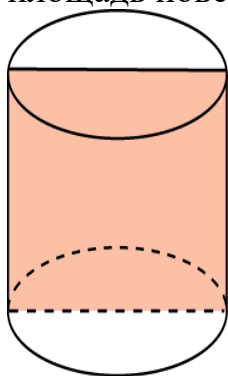
7. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объемов.



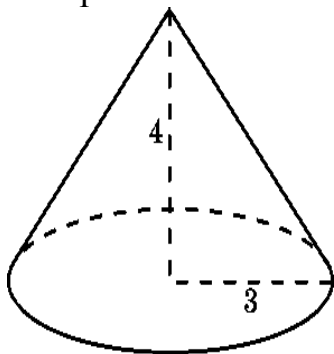
8. Прямоугольник вращается вокруг одной из сторон, равной 5 см. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 100π см². Найдите площадь прямоугольника.

Вариант 2

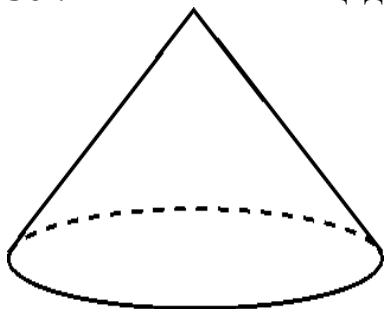
1. Осевое сечение цилиндра - квадрат. Площадь основания равна 1. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра.



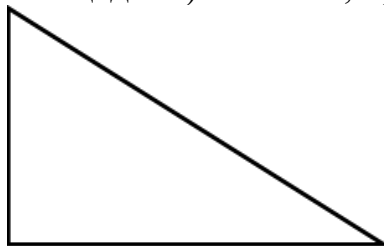
2. Радиус основания конуса равен 3 м, высота - 4 м. Найдите площадь поверхности и объем конуса.



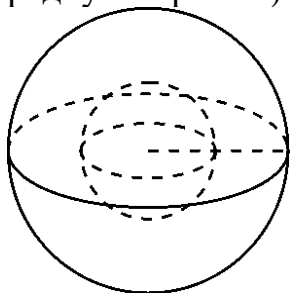
3. Образующая конуса равна 4 дм, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите площадь боковой поверхности и объем конуса.



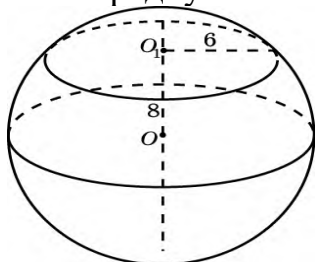
4. Два конуса образованы вращением одного и того же прямоугольного треугольника вокруг его неравных катетов. Равны ли у этих конусов площади: а) боковых; б) полных поверхностей? в) объемы?



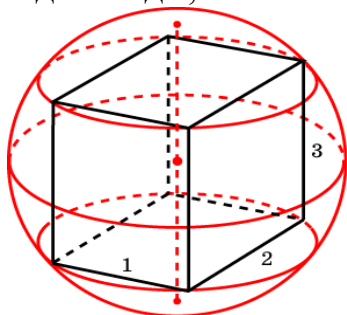
5. Как изменится площадь поверхности и объем шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?



6. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности и объем шара.



7. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1 дм, 2 дм и 3 дм, описан шар. Найдите площадь его поверхности.



8. Прямоугольник, одна из сторон которого равна 5 см, вращается вокруг неизвестной стороны. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 60π см². Найдите площадь прямоугольника.

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.

2. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
3. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме

1. Чему равен угол между плоскостью основания цилиндра и плоскостью, проходящей через образующую цилиндра?
2. Точки А и В принадлежат шару. Принадлежит ли этому шару любая точка отрезка АВ?
3. Каким соотношением связаны объемы V_1 и V_2 тел P_1 и P_2 если: а) тело P_1 содержится в теле P_2 ; б) каждое из тел P_1 и P_2 составлено из n кубов ребром в 1 см?
4. Из каких тел состоит тело, полученное вращением равнобедренной трапеции вокруг большего основания?
5. Как изменится площадь сферы, если ее радиус: а) уменьшить в 2 раза; б) увеличить в 3 раза?
6. Изменится ли объем цилиндра, если диаметр его основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 4 раза?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
$90 \div 100$	5	отлично
$70 \div 89$	4	хорошо
$50 \div 69$	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.24 Самостоятельная работа № 24 (час.)

Тема Касательная плоскость к сфере. Взаимное расположение сферы и прямой (час).

Цель: Формирование умений работать с учебником.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Задания по теме

1. Изучите самостоятельно тему «Касательная плоскость к сфере. Взаимное расположение сферы и прямой»
2. Сделайте конспект по данной теме.
3. Занесите в опорные конспекты необходимые чертежи, формулы.
4. Выписать таблицу неопределенных интегралов
5. Решить самостоятельно задания для самопроверки №584, № 585, № 591.

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Интернет ресурсы.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.25 Самостоятельная работа № 25 (час.)

Тема: Сфера вписанная в цилиндрическую поверхность.

Цель: Формирование умений решать задачи по данной теме.

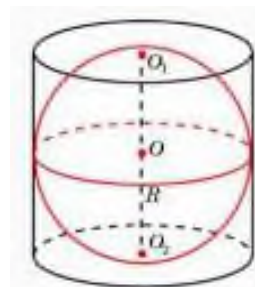
Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической

части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Сфера, вписанная в цилиндр



Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом цилиндр называется описанным около сферы. В цилиндр можно вписать сферу, если высота цилиндра равна диаметру его основания. Ее центром будет точка O , являющаяся серединой отрезка, соединяющего центры оснований O_1 и O_2 цилиндра. Радиус сферы R будет равен радиусу окружности основания цилиндра.

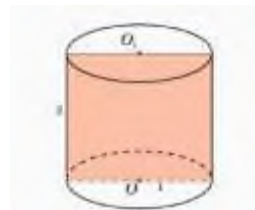
Задания по теме

№ 1 В цилиндр высоты 2см вписана сфера. Найдите ее радиус.

№ 2 В цилиндр вписана сфера радиуса 1. Найдите высоту цилиндра.

№ 3 Радиус основания цилиндра равен 2. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы в него можно было вписать сферу?

№ 4 Высота цилиндра равна 2. Каким должен быть радиус основания цилиндра, чтобы в него можно было вписать сферу?



№ 5 Осевым сечением цилиндра является прямоугольник со сторонами 1 и 2. Можно ли в этот цилиндр вписать сферу?

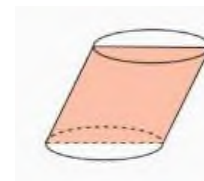
№ 6 Осевым сечением цилиндра является квадрат. Можно ли в этот цилиндр вписать сферу?

№ 7 Можно ли вписать сферу в цилиндр, осевым сечением которого является ромб?

№8 Можно ли вписать сферу в наклонный цилиндр?

№ 9 Площадь осевого сечения цилиндра, в который вписана сфера, равна 4 см^2 . Найдите диаметр сферы.

№10 Периметр осевого сечения цилиндра, в который вписана сфера, равен 8 см. Найдите радиус сферы.



Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
3. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Какая сфера называется вписанной в многогранник?
2. Какая сфера называется вписанной в цилиндр?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.26 Самостоятельная работа № 26 (час.)

Тема: Решение задач прикладной направленности по теме «Тела вращения»

Цель: Формирование умений применять полученные по данной теме знания при решении прикладных задач.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Задания по теме

1. Сколько в связке электродов для электросварки, если их общая масса 10 кг, а каждый электрод – кусок стальной проволоки длиной 45 см и диаметром 6 мм?
2. Железобетонная панель имеет размеры 600 х 120 х 22 см. По всей её длине 6 цилиндрических отверстий, диаметр которых 14 см. Найдите массу панели, если плотность материала 2,5 т/м³.
3. Два обручальных кольца имеют форму шарового пояса без цилиндра. Цилиндрические поверхности колец имеют одинаковую высоту. А их диаметры соответствуют толщине пальцев жениха и невесты. Докажите, что эти кольца имеют одинаковую массу.

4. Деталь представляет собой комбинацию части шара и двух цилиндров с равными основаниями. Высоты верхнего и нижнего оснований цилиндров равны 8 см и 12 см, радиусы оснований 8 см, радиус шара равен 17 см. Найдите объём детали.
5. При взрыве заряда взрывчатого вещества воронка действия имеет вид конуса, где ω - линия наименьшего сопротивления, а r - радиус воронки. Определить объём взорванной породы в пределах конуса разрыхления, если $\omega = r = 1,5$ м.
6. Сколько железнодорожных платформ грузоподъемностью 25 т каждая нужно для перевозки кучи угля, имеющего форму конуса с высотой $H=7,5$ м, если плотность угля 1300 кг/см^3 , а угол естественного откоса $\alpha=50^\circ$?

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
2. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург, 1995
3. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Один конус получен вращением неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов, а другой конус - вращением вокруг другого катета. Равны ли объёмы этих конусов?
2. Диаметр одного шара равен радиусу другого. Чему равно отношение радиусов этих шаров; объёмов шаров?
3. Изменится ли объём цилиндра, если диаметр его основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 4 раза?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.27 Самостоятельная работа № 27 (час.)

Тема: Корень n-ой степени и его свойства.

Цель: Формирование умений нахождения и преобразования выражений, содержащих корни.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Основные свойства корней

Для любого натурального n , целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

$$1^0. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$2^0. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0).$$

$$3^0. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0).$$

$$4^0. \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0).$$

$$5^0. \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k \quad (\text{если } k \leq 0, \text{ то } a \neq 0).$$

Примеры решения упражнений:

№1 Вычислить:

$$\text{а) } \sqrt[3]{-8}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{16}; \quad \text{в) } \sqrt[5]{\frac{1}{32}}; \quad \text{г) } \sqrt[4]{\frac{81}{625}};$$

Решение:

$$\text{а) } \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2;$$

$$\text{б) } \sqrt[4]{16} = 2;$$

$$\text{в) } \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2};$$

$$\text{г) } \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{3}{5}.$$

№2 Решите уравнение

$$\text{а) } x^6 = 5;$$

$$\text{б) } x^3 = 5;$$

Решение:

$$\text{а) } x^6 = 5;$$

так как степень 6- четное число, то уравнение имеет два корня

$$x = \pm \sqrt[6]{5}.$$

Ответ: $\pm \sqrt[6]{5}$.

б) $x^3=5$;

так как 3-нечетное число, то уравнение имеет один корень.

$x = \sqrt[3]{5}$.

Ответ: $\sqrt[3]{5}$.

Для арифметического корня n -й степени, как и для квадратного корня, существуют операции внесения множителя под знак корня и вынесение множителя из-под знака корня.

Например :

$$2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3 a} = \sqrt[3]{8a}.$$

Из примера видно, что для внесения множителя под знак корня n -й степени его нужно

возвести в n -ю степень. Нужно помнить, что под знак с четным показателем мы имеем право внести только положительный множитель, например:

$$-a^3 \sqrt[4]{36} = -\sqrt[4]{(a^3)^4} \cdot \sqrt[4]{36} = -\sqrt[4]{3a^{12}}.$$

Аналогично производится вынесение множителя из-под знака корня, например:

а) $\sqrt[3]{27a^2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^2} = 3\sqrt[3]{a^2}$;

б) $\sqrt{5a^6c} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{5c} \cdot \sqrt{(a^3)^2} = \sqrt{5c} \cdot |a|^3$;

в) $\sqrt[3]{54a^{10}} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot a^9 a} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{(a^3)^3} = 3a^3 \sqrt[3]{2a}$;

Задания по теме

1 вариант	2 вариант
№1 Вычислить:	
а) $\sqrt[3]{-216}$; б) $\sqrt[5]{32}$;	а) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.
№2 Решите уравнение:	
а) $x^3=64$; б) $x^4-81=0$;	а) $16x^4-1=0$; б) $12\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$.
№3 Вычислить	
а) $\sqrt[3]{0,008 \cdot 27}$; б) $\frac{\sqrt[3]{24}}{4\sqrt[3]{2}}$;	а) $\frac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$.
№4 Упростите выражение:	
а) $\sqrt[7]{2^{14} q^{28}}$; б) $\sqrt[5]{11^5 d^{10}}$; в) $\sqrt[9]{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ з) $\frac{\sqrt[3]{375n^2}}{\sqrt[3]{3n^{14}}}$	а) $\sqrt[4]{8x^3 y^5} \cdot \sqrt[4]{2xy^7}$; б) $\sqrt[5]{\frac{8c^2}{d}} : \sqrt[5]{\frac{d^9}{4c^3}}$; в) $\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{a}}$ з) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$.
№5 Вынесите множитель из-под знака корня ($a > 0$; $b > 0$).	
а) $\sqrt[5]{-128a^7}$;	а) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6}$.
№6 Упростите выражение	

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$	$\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y}} + \sqrt[3]{y}$
---	--

Рекомендуемая литература:

- 1.Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.
- 2.Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
- 3.Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.
4. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- п-ой степени 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.
- 6.Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Дайте определение корня n-ой степени из числа.
2. Что такое арифметический корень n-ой степени?
3. Перечислите основные свойства арифметических корней.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.28 Самостоятельная работа № 28 (час.)

Тема: Решение иррациональных уравнений.

Цель: Закрепление навыков решения иррациональных уравнений.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Изучите самостоятельно материал по данной теме. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения задач.

Иррациональные уравнения - это уравнения содержащие переменную под знаком корня.

Методы решения:

- *Возведение в степень, равную показателю корня;*
- *Замена переменной;*
- *Особые случаи*

Возводим обе части уравнения в квадрат при условии, что его правая часть равна нулю

$$\begin{array}{c} \sqrt{f(x)} = g(x) \\ \Downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Формулы для повторения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2;$$

Решение квадратных уравнений:

$$a \cdot x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$\text{Если } D > 0, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

$$\text{Если } D = 0, \text{ то } x = \frac{-b}{2a}$$

Если $D < 0$, то корней нет

Задания по теме

Вариант 1

Решить уравнения

1. $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{6 - 3x};$

2. $\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x};$

3. $\sqrt{3x + 1} = x - 1;$

4. $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+6} = 4$;
5. $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$;
6. $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0$;
7. При каких значениях x функция $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ принимает значение равное 2?
8. Укажите наибольший корень уравнения: а) $\sqrt{x^2 - x + 16} - \sqrt{x^2 - x - 4} = 2$
б) $(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 6} = 0$
9. Выясните с помощью графика, сколько корней имеет уравнение:
 $\sqrt{x} = 6 - x^2$

Вариант 2

Решить уравнения

1. $\sqrt{x^2 - 10} = \sqrt{-3x}$;
2. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1 - x}$;
3. $\sqrt{2x + 4} = x - 2$;
4. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} = 3$;
5. $3\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} = 5$;
6. $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x} - 3 = 0$;
7. При каких значениях x функция $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ принимает значение равное 3?
8. Укажите наибольший корень уравнения: а) $\sqrt{2x^2 - x + 1} + \sqrt{2x^2 - x + 10} = 9$
б) $(x - 1)\sqrt{x^2 - 4} = 0$.
9. Выясните с помощью графика, сколько корней имеет уравнение:
 $x^3 - 2 = \sqrt{x - 1}$

Рекомендованная литература

1. Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.
2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.
4. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.

6. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Какое уравнение называется иррациональным?
2. Перечислите способы решения иррациональных уравнений.
3. Как графически определить количество корней уравнения?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.29 Самостоятельная работа № 29 (час.)

Тема: Исследование свойств показательной функции.

Цель: Формирование пониманий свойств показательной функции и умение их использования при решении задач

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

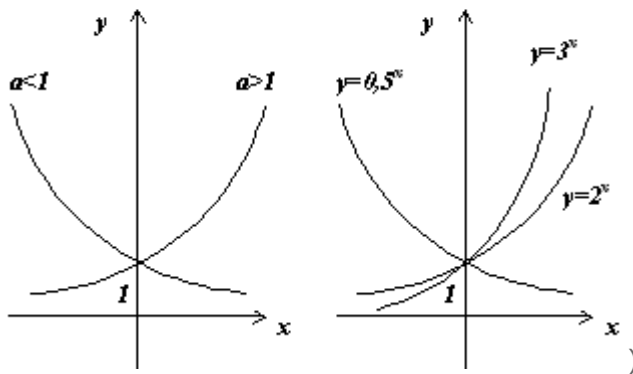
Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Показательная функция

Функция $y = a^x$ (где $a > 0, a \neq 0$), называется показательной функцией с основанием a .

$y = a^x$



Основные свойства показательной функции $y = a^x$

- Область определения функции - вся числовая прямая.
- Область значений функции - промежуток $(0; +\infty)$.
- Функция возрастает на всей числовой прямой при $a > 1$, при $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения.
- При $x = 0$ значение функции равно 1.
- Для функции $y = a^x$ справедливы основные свойства степеней.

Задания по теме

№	1 вариант	2 вариант																								
1	А) Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ Данная функция является возрастающей или убывающей? Б) Постройте график функции $y = 3^x$ Данная функция является возрастающей или убывающей?	А) Постройте график функции $y = 4^x$ Данная функция является возрастающей или убывающей? Б) Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ Данная функция является возрастающей или убывающей?																								
2	А) Для функции $y = 7^x$ Заполните таблицу значений: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Что больше: $y(1)$ или $y(2)$? Функция является возрастающей или убывающей??	x	0	1	2	-1	-2	y						А) Для функции $y = 8^x$ Заполните таблицу значений: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Что больше: $y(1)$ или $y(2)$? Функция является возрастающей или убывающей??	x	0	1	2	-1	-2	y					
x	0	1	2	-1	-2																					
y																										
x	0	1	2	-1	-2																					
y																										

	Б) Для функции $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ Заполните таблицу значений: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Что больше: $y(1)$ или $y(2)$? Функция является возрастающей или убывающей??	x	0	1	2	-1	-2	y						Б) Для функции $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ Заполните таблицу значений: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Что больше: $y(1)$ или $y(2)$? Функция является возрастающей или убывающей??	x	0	1	2	-1	-2	y					
x	0	1	2	-1	-2																					
y																										
x	0	1	2	-1	-2																					
y																										
3.	Найдите область определения функции: $y = -2^x$	Найдите область определения функции: $y = 5^x - 1$																								
4.	Найдите наибольшее и наименьшее значения функции: $y = 4^{\cos x}$	Найдите наибольшее и наименьшее значения функции: $y = 3^{\cos x}$																								
5.	Решите графически уравнение: $3^x = 4 - x$	Решите графически уравнение: $4^x = 5 - x$																								

Рекомендуемая литература:

- Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.
- Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.
- Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.
- А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
- Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.
- Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

- Перечислите основные свойства показательной функции.
- Верно ли, что показательная функция: а) имеет экстремумы; б) принимает наибольшее значение в некоторой точке x_0 ; в) принимает в некоторой точке значение, равное нулю; г) является четной (нечетной)?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.Самостоятельная работа № 30 (час.)**Тема: Решение показательных уравнений и неравенств.**

Цель: Формирование умений решать показательные уравнения и неравенства

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Показательное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени

Замечание:

$$a^{\underline{f(x)}} = a^{\underline{g(x)}} \quad \text{О.Д.З.: } x \in R$$

⇓

$$\underline{f(x) = g(x)}$$

(решаем полученное уравнение)

$$a^{\underline{f(x)}} = b \quad \text{О.Д.З.: } x \in R$$

* Если $b \leq 0$, то корней нет;

* Если $b > 0$, то $a^{\underline{f(x)}} = a^{\log_a b}$

⇓

$$\underline{f(x) = \log_a b}$$

(решаем полученное уравнение)

Примеры**1.Метод выноса за скобки**

Решить уравнение: $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$

В левой части выносим за скобки степень с наименьшим показателем, то есть 3^{x-2} . В результате получим:

$$3^{x-2} \left(\frac{3^{x+1}}{3^{x-2}} - \frac{2 \cdot 3^{x-2}}{3^{x-2}} \right) = 25$$

$$3^{x-2} (3^{x+1-(x-2)} - 2) = 25$$

$$3^{x-2} (3^{x+1-x+2} - 2) = 25$$

$$3^{x-2} (3^3 - 2) = 25$$

$$3^{x-2} \cdot 25 = 25$$

$$3^{x-2} = 1, \quad 3^{x-2} = 3^0, \quad \text{отсюда следует, что } x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

2. Уравнения, сводящиеся к квадратным (метод замены)

Решить уравнение: $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение: Заметив, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, а $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

Перепишем заданное уравнение в виде:

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Вводим новую переменную: $t = 2^x$, тогда уравнение примет вид:

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

Решив квадратное уравнение, получим: $t_1 = 4$, $t_2 = -6$. Но так как $t = 2^x$, то надо решить два уравнения:

$$2^x = 4 \quad \text{и} \quad 2^x \neq -6$$

Решим первое уравнение:

$$2^x = 2^2 \quad \text{отсюда следует, что } x = 2.$$

Рассмотрим второе уравнение.

Второе уравнение не имеет решения, так как $2^x > 0$ для любых значений x .

Ответ: 2.

Образцы решения показательных неравенств

1. Решить неравенство $2^x - 2^{x-2} \leq 3$.

Решение:

Выносим за скобки степень с наименьшим показателем, т.е. 2^{x-2} .

$$\text{Получим: } 2^{x-2}(2^2 - 1) \leq 3,$$

$$2^x \cdot 3 \leq 3,$$

$$2^x \leq 1, \quad \text{так как } 2^0 = 1 \text{ то}$$

$$2^x \leq 2^0$$

Так как основание $2 > 1$, то неравенство равносильно неравенству того же смысла $x \leq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0]$.

2. Решить неравенство $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 > 0$

Решение.

Заменим: $7^x = t, t > 0$;

Получим неравенство: $t^2 - 8t + 7 > 0$. Трехчлен $t^2 - 8t + 7$ разложим на множители: $(t - 7)(t - 1) > 0$.

$$t < 7; t > 1.$$

$$7^x < 7, \quad a = 7 > 1, \quad \text{то } x < 1$$

$$7^x > 1, \quad 7^x > 7^0, \quad a = 7 > 1, \quad \text{то } x > 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (0; \infty)$.

Задания по теме

№п/п	Вариант 1	Вариант 2
Решите уравнения:		
1	$3^{x+2} - 3^x = 72$	$2^x - 2^{x-4} = 15$
2	$2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$	$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 3159$
3	$2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 10 = 0$	$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$
4	$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$	$4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x + 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 = 0$
Решите неравенства:		
5	$2^x + 2^{x+2} \leq 20$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$
6	$7^x \geq 7^{x-1} + 6$	$2^{x+2} - 2^x > 96$
7	$7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 > 0$	$9^x - 6 \cdot 3^x < 27$
8	$0,2^{2x} - 1,2 \cdot 0,2^x + 0,2 > 0$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x + 7 < 0$

Рекомендуемая литература:

- Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.
- Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. Шк. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 351 с.
- Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. Шк., 1984.-351 с.
- А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с
- Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.
- Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

- Найдите корни уравнения $a^x = a^c$ ($a > 0, a \neq 1$).
- Найдите корни уравнения $a^x = a$ ($a > 0, a \neq 1$).
- Решите неравенство $a^x > a^c$. Рассмотрите два случая.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.31 Самостоятельная работа № 31 (час.)

Тема: Логарифмы и их свойства

Цель: Формирование умений вычислять логарифмы, применять их свойства при решении задач.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступить к выполнению практической части.

Логарифмом положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) называется показатель степени, в которую надо возвести a , чтобы получить b (числа b , a – положительные, $a \neq 1$).

$$\text{Если } a^c = b, \quad \text{то} \quad \log_a b = c$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0$;
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;
5. $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$.

Пример 1. Вычислите $\log_2 8$

Решение: $\log_2 8 = 3$. (т.к. $2^3 = 8$).

Пример 2. Вычислите $\log_5 25$.

Решение: $\log_5 25 = 2$

Пример 3. Вычислите $\log_2 2^4$

Решение: $\log_2 2^4 = 4$

Пример 5. Вычислите $\log_6 \frac{1}{36}$

Решение. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

Пример 6. Вычислите $\log_{\frac{1}{3}} 27$

Решение: $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -4$

Задания по теме

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\log_3 27$; б) $\log_9 \frac{1}{81}$; в) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; г) $\log_{0,2} 5$; д) $\log_{98} 1$; е) $\log_{12} 12$; ж) $\log_9 9^5$

2. Вычислите:

а) $5,1^{\log_{5,1} 9}$; б). $7^{\log_7 16}$; в) $12^{1+\log_{12} 4}$; г) $\log_2 \frac{1}{32}$;
д) $\log_{27} 9$; е). $3^{1+\log_3 5}$; ж) $2^{2+\log_2 5}$; з). $2^{3\log_2 4}$; и) $\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$

3. Чему равен x ? Ответ запишите ответ с помощью логарифма.

А) $3^x = 8$; б) $0,9^x = 23$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 31$

4. Выяснить при каких значениях X имеет смысл выражение:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(4 - x)$; б) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 16)$; в) $\log_3 \frac{7 - 3x}{x - 4}$;

5. Вычислите:

а) $\log_{15} 5 + \log_{15} 3$; б) $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 2$; в) $\log_5 50 - \log_5 2$; г) $\log_2 8^7$;

д) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; е) $\frac{1}{2} \log_{10} 0,81 - 2 \log_{10} 3$;

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\log_4 64$; б) $\log_7 \frac{1}{49}$; в) $\log \frac{1}{3} 81$; г) $\log_{0,5} 2$; д) $\log_{79} 1$; е) $\log_{71} 71$; ж) $\log_{0,78} 0,78^4$

2. Вычислите:

а) $6,3^{\log_{6,3} 7}$; б) $5^{\log_5 13}$; в) $7^{2+\log_7 4}$; г) $\log_3 \frac{1}{27}$; д) $\log_{16} 8$;
 е) $5^{\log_5 0,2}$; ж) $3^{1+\log_3 8}$; з) $5^{2\log_5 3}$; и) $\frac{\log_4 36}{\log_4 6}$

3. Чему равен x ? Ответ запишите ответ с помощью логарифма.

А) $5^x = 7$; б) $0,8^x = 17$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$

4. Выяснить при каких значениях X имеет смысл выражение:

а) $\log_{0,2}(7-x)$; б) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-16)$; в) $\log_5 \frac{7+2x}{x-3}$;

5. Вычислить:

а) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$; б) $\log_{\frac{1}{6}} 4 + \log_{\frac{1}{6}} 9$; в) $\log_4 192 - \log_4 3$; г) $\log_3 9^{10}$;

д) $\log_{15} \sqrt[3]{225}$; е) $\frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{81} - \frac{1}{3} \log_3 \frac{8}{27}$;

Рекомендуемая литература:

1. Завич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.

2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. Шк. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 351 с.

3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие. – М.; Высш. Шк., 1984. – 351 с.

4. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2004. – 384 с

5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.

6. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Дайте определение логарифма.
2. Перечислите основные свойства логарифма.
3. Запишите основное логарифмическое тождество.
4. Запишите формулу перехода от одного основания логарифма к другому.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.32 Самостоятельная работа № 32 (час.)

Тема: Решение логарифмических уравнений и неравенств

Цель: Формирование умений решать логарифмические уравнения и неравенства.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

Самостоятельная работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Образцы решения логарифмических уравнений

1. Решить уравнение:

$$\log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3(2x - 1)$$

Решение: Используя формулу: $\log_a \square + \log_a \square = \log_a (\square \cdot \square)$, заменим сумму логарифмов произведением:

$$\log_3((x - 2) \cdot (x + 2)) = \log_3(2x - 1)$$

$$x^2 - 4 = 2x - 1$$

$$x^2 - 4 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1.$$

Проверка:

$$x_1 = 3$$

$$\log_3(3 - 2) + \log_3(3 + 2) = \log_3(2 \cdot 3 - 1)$$

$$\log_3 5 = \log_3 5$$

$$x_2 = -1$$

$\log_3(-1-2) + \log_3(-1+2) = \log_3(2 \cdot (-1) - 1)$ - не существует.

Ответ: $x = 3$

2. Решить уравнение:

$\log_4^2 x + \log_4 x - 2 = 0$. Используем метод замены.

$$\log_4 x = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$\square_1 = 1$, $\square_2 = -2$. Подставим в замену.

$$\log_4 x = 1 \Rightarrow x = 4^1 = 4, \quad \log_4 x = -2 \Rightarrow x = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $x = 4$; $x = \frac{1}{16}$.

Задания по теме

1 вариант

A1. Укажите промежуток, которому принадлежат все корни уравнения:

$$\log_2(x^2 - 5) = 5$$

1) $(-7; 7)$

2) $(-6; 8)$

3) $(-8; 6)$

4) $(0; +\infty)$.

A2. Найдите сумму корней уравнения $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln(x + 3)$

1) 0

2) 9

3) 10

4) 11.

A3. Решите неравенство $\log_3(x - 9) > 3$

1) $(36; +\infty)$

2) $(27; +\infty)$

3) $(18; +\infty)$

4) $(9; +\infty)$.

A4. Решите неравенство: $\log_{0,5}(x^2 - 4) < 0$

1) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ 2) $(-2; 2)$ 3) $(-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5})$ 4) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$

B1. Решите уравнение: $\log_2 x - \log_4 x = 2$.

B2. Решите уравнение: $\lg^2(10x) + 2 \lg x = 13$. В ответе укажите наибольший из корней данного уравнения.

B3. Найдите наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству

$$\log_2(3 - 2x) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3 - 2x) > 6$$

C1. Найдите все значения x , при которых равны значения выражений:

$$20x \log_2 \sqrt{5 - 2x} + 2x^2 \log_{0,5}(5 - 2x)^2 \quad \text{и} \quad 4x^2 - 10x.$$

2 вариант

При выполнении заданий А1 – А4 в ответе, выполняемого задания, поставьте цифру соответствующую номеру выбранного вами ответа.

А1. Укажите промежуток, которому принадлежат все корни уравнения:

$$\log_3(x^2 + 8x) = 2$$

- 1) $(-12; 0)$ 2) $(-10; 2)$ 3) $(-8; 8)$ 4) $(0; +\infty)$.

А2. Найдите сумму корней уравнения $\log_2(x + 3) + \log_2(x + 2) = \log_2 6$

- 1) 0 2) 5 3) -1 4) -5.

А3. Решите неравенство $\lg(3x - 2) \geq 1$

- 1) $[1; +\infty)$ 2) $[3; +\infty)$ 3) $[4; +\infty)$ 4) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

А4. Решите неравенство: $\log_{0,9}(x^2 - 1) > 0$

- 1) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ 2) $(-1; 1)$ 3) $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$ 4) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

В1. Решите уравнение: $\log_3 x - \log_9 x = \frac{3}{2}$.

В2. Решите уравнение: $\log_2^2(4x) = 6\log_2 x + 7$. В ответе
кажите наименьший из корней данного уравнения.

В3. Найдите наименьшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству
 $\lg(x - 2) - \log_{\sqrt{10}}(x - 2) < -1$

С1. Найдите все значения x , при которых равны значения выражений:

$$8x \log_5(2x - 1)^4 + 2x^5 \log_{0,2}(2x - 1) \text{ и } 4x^5 - 64x.$$

Рекомендуемая литература:

1.Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.

2.Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.

3.Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.

4. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с

5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. в 2 ч. ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 5 издание М., .Мнемозина, 2012.

6.Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Решите уравнение: $\log_3 x = 1$;
2. Решите уравнение $\log_{0,1} x = 0$;
3. Решите неравенство $\log_a x = b$. Рассмотрите два случая.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.33 Самостоятельная работа № 33 (час.)

Тема: Жизнь и деятельность ученых – математиков

Цель: Расширение кругозора обучающихся, знакомство с жизнью и деятельностью ученых - математиков.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

План работы над рефератом:

1. Подбери литературу по изучаемой теме, познакомься с ее содержанием.
2. Отметь наиболее существенные места или сделай выписки.
3. Составь план реферата.
4. Пользуясь рекомендациями, напиши реферат, в заключение которого обязательно вырази свое отношение к излагаемой теме и ее содержанию.
5. Прочитай текст, отредактируй его.
6. Оформи в соответствии с требованиями к оформлению рефератов.

Задание: написать реферат о жизни и деятельности одного из

математиков (на выбор):

- | | |
|-------------------------|-------------------------------|
| 1. Николай Лобачевский; | 11.Рене Декарт; |
| 2. Софья Ковалевская; | 12.Эварист Галуа; |
| 3. Николай Боголюбов; | 13.Карл Вейерштрасс; |
| 4. Григорий Перельман; | 14.Пьер Ферма; |
| 5. Пафнутий Чебышев; | 15.Джон Нейман; |
| 6. Виктор Садовничий; | 16.Жан Даламбер; |
| 7. Леонтий Магницкий; | 17.Клаус Мёбиус; |
| 8. Владимир Брадис; | 18.Евклид; |
| 9. Константин Поссе; | 19.Пифагор; |
| 10.Андрей Колмогоров; | 20.Гётфрид Вильгельм Лейбниц. |

Рекомендуемая литература:

1. Гейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. М.: Просвещение. 1981. -239с.
2. Интернет ресурсы.

Отчет о работе: задание должно быть выполнено на листах формата А4 в электронном виде или рукописный вариант.

Критерии и показатели, используемые при оценивании учебного реферата

Критерии	Показатели
1.Новизна реферированного текста Макс. - 20 баллов	- актуальность проблемы и темы; - новизна и самостоятельность в постановке проблемы, в формулировании нового аспекта выбранной для анализа проблемы; - наличие авторской позиции, самостоятельность суждений.
2. Степень раскрытия сущности проблемы Макс. - 30 баллов	- соответствие плана теме реферата; - соответствие содержания теме и плану реферата; - полнота и глубина раскрытия основных понятий проблемы; - обоснованность способов и методов работы с материалом; - умение работать с литературой, систематизировать

	и структурировать материал; - умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения по рассматриваемому вопросу, аргументировать основные положения и выводы.
3. Обоснованность выбора источников Макс. - 20 баллов	- круг, полнота использования литературных источников по проблеме; - привлечение новейших работ по проблеме (журнальные публикации, материалы сборников научных трудов и т.д.).
4. Соблюдение требований к оформлению Макс. - 15 баллов	- правильное оформление ссылок на используемую литературу; - грамотность и культура изложения; - владение терминологией и понятийным аппаратом проблемы; - соблюдение требований к объему реферата; - культура оформления: выделение абзацев.
5. Грамотность Макс. - 15 баллов	- отсутствие орфографических и синтаксических ошибок, стилистических погрешностей; - отсутствие опечаток, сокращений слов, кроме общепринятых; - литературный стиль.

Оценивание реферата

Реферат оценивается по 100 балльной шкале, баллы переводятся в оценки успеваемости следующим образом:

- 86 – 100 баллов – «отлично»;
- 70 – 75 баллов – «хорошо»;
- 51 – 69 баллов – «удовлетворительно»;
- мене 51 балла – «неудовлетворительно».

Баллы учитываются в процессе текущей оценки знаний программного материала.

2.34 Самостоятельная работа № 34 (час.).

Тема: Обратная функция.

Цель: формирование умений самостоятельной работы с учебной литературой.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

1. Изучить самостоятельно тему «Понятие об обратной функции»
2. Сделать конспект п.40 в тетрадь.
3. Начертить необходимые рисунки.
4. Решить самостоятельно № 531, №533 №534, № 535

Рекомендуемая литература:

. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Сформулируйте определение обратной функции.
2. Как располагаются графики функции f и обратной к ней на координатной плоскости?
3. Сформулируйте теорему об обратной функции.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.35 Самостоятельная работа № 35 (час.).

Тема: Понятие о дифференциальных уравнениях.

Цель: формирование умений самостоятельной работы с учебной литературой.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

- 1.Изучить самостоятельно тему «Понятие о дифференциальных уравнениях».
- 2.Сделать конспект п.44 в тетрадь.
- 3.Решить самостоятельно № 568, № 569 № 572, № 573, № 574

Рекомендуемая литература:

. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений.; Под ред. А. Н. Колмогорова.- 14-е изд.- М.: Просвещение, 2004.- 384 с

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

- 1.Сформулируйте определение простейшего дифференциального уравнения.
- 2.Приведите примеры использования дифференциальных уравнений в других дисциплинах.
- 3.Приведите примеры приведения дифференциальных уравнений в гармонических колебаниях.

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.36. Самостоятельная работа № 36 (час.).

Тема: Теория вероятностей и математическая статистика.

Цель: формирование умений решения задач по теме «Теория вероятностей и математическая статистика».

.

Методические указания

Изучите лекцию по теме «Теория вероятностей и математическая статистика». Выучите определения элементов комбинаторного анализа: размещения, перестановки, сочетания, формулу Ньютона, понятия случайных

событий, вероятности событий, простейшие свойства вероятности. Рассмотрите задачи математической статистики, выборку, вариационный ряд.

Рассмотрите примеры:

1. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

2. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить три предмета. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Способов постановки в расписание трех предметов из 16 столько, сколько можно составить размещений из 16 элементов по 3.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360.$$

3. Из 15 объектов нужно выбрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$$\begin{aligned} C_{15}^{10} &= \frac{15!}{(15-10)! \cdot 10!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{5! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = \\ &= \frac{11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 14}{2} = 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 = 3003. \end{aligned}$$

Задания по теме

1. В соревнованиях участвовало шесть команд. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

2. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 60 солдат и 4 офицера?

3. В бригаде из 30 человек нужно выделить пятерых для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколько вариантов распределения четырех путевок в санатории различного профиля можно составить для десяти претендентов?

5. Задан закон распределения случайной величины X . 1) найдите все числовые характеристики случайной величины; 2) постройте многоугольник распределения; 3) составьте функцию распределения; 4) постройте график функции распределения.

X	5	7	10	15
$p(x)$	0,2	0,5	0,2	0,1

6. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей

X	100	150	200	250	300
$p(x)$	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05

Рекомендуемая литература:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. - М.: Издательский центр «Академия», 2010

2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике [Текст]: учебное пособие для студентов СПО / Н. В. Богомолов. – Изд. 6-е, стереотип. – М.: «Высшая школа», 2003. – 495 с.

3. Интернет ресурсы.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Дайте определение перестановки.
2. Запишите формулу бинома Ньютона.
3. Запишите формулу для сочетания.
4. Как найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо

50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.37 Самостоятельная работа № 37 (час.).

Тема: Углы и отрезки, связанные с окружностью

Цель: формирование умений самостоятельной работы с учебной литературой.

Оснащение: данные методические указания, рекомендуемая литература.

Методические указания

- 1.Изучить самостоятельно тему «Углы и отрезки, связанные с окружностью».
- 2.Сделать конспект в тетрадь §1 гл.7
- 3.Решить самостоятельно № 816, № 818 № 822, № 825, № 828

Рекомендуемая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

- 1.Сформулируйте теорему об угле между касательной и хордой, проходящей через точку касания.
- 2.Как найти угол между двумя пересекающимися хордами?
- 3.Как вычислить угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки?
- 4.При каком условии около четырехугольника можно описать окружность?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

2.38 Самостоятельная работа № 38 (час.).

Тема: Общие методы решения уравнений и неравенств

Цель: совершенствование умений решения уравнений и неравенств.

Методические указания

1. Повторите самостоятельно основные методы решения уравнений и неравенств.
2. Решить самостоятельно предложенные задания.

Задания по теме

Вариант 1

1. Решите уравнения методом разложения на множители:
а) $x^5 + 5x^4 - 6x^3 = 0$; б) $(x^2 - 3x + 2)(x - 6) = 0$;
в) $\cos^2 x + \cos x = 0$
2. Решите уравнения методом введения новой переменной:
а) $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$; б) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;
в) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$
3. Решите неравенства: а) $(x + 2)^2 < x^2 + 8x + 5$; б) $x^2 - 5x - 24 \leq 0$;
в) $\frac{x-2}{x+3} > 0$

Вариант 2

1. Решите уравнения методом разложения на множители:
а) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 = 0$; б) $(x^2 - x + 2)(x + 4) = 0$;
в) $\sin x + \sin 2x = 0$
2. Решите уравнения методом введения новой переменной:
а) $\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$; б) $3^{2x} - 6 \cdot 2^x - 27 = 0$;
в) $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$
3. Решите неравенства: а) $(x - 1)^2 > x^2 + 2x - 3$; б) $x^2 - 11x + 28 > 0$;
в) $\frac{x-5}{x+2} \leq 0$

Вариант 3

1. Решите уравнения методом разложения на множители:
а) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$; б) $(x^2 - 6x - 27)(x - 1) = 0$;
в) $\sin 2x + \cos x = 0$
2. Решите уравнения методом введения новой переменной:
а) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$; б) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$;
в) $2\log_2^2 x + 5\log_2 x + 2 = 0$

3. Решите неравенства: а) $(1 - 2x)^2 < 8x + 4x^2 - 6$; б) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$;
 в) $\frac{x+3}{x-7} > 0$

Вариант 4

1. Решите уравнения методом разложения на множители:

а) $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 = 0$; б) $(2x^2 + 3x - 2)(x + 2) = 0$;

в) $\sin^2 x + \sin x = 0$

2. Решите уравнения методом введения новой переменной:

а) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$; б) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$;

в) $3\log_2^2 x - 7\log_2 x + 2 = 0$

3. Решите неравенства: а) $(3 - 2x)^2 > 4x^2 + 2x - 1$; б) $2x^2 - 3x - 5 < 0$;

в) $\frac{3-x}{x+4} \geq 0$

Вопросы для самопроверки и проверки по теме:

1. Какие уравнения называются равносильными?
2. Как решить иррациональное уравнение?
3. Как решить однородное уравнение?
4. Как решить уравнение методом интервалов?

Отчет о работе: индивидуальные практические задания выполняются в тетради для самостоятельных работ

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 89	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

3. Список рекомендуемой литературы

7. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 (11) кл. Учебник для общеобразовательных учреждений, М., Просвещение, 2007.
8. Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений под

редакцией Теляковского С.А, М., Просвещение , 2012.

9. Алгебра. Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений под редакцией Теляковского С.А, М., Просвещение , 2012.

10. Алгебра. Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений под редакцией Теляковского С.А, М., Просвещение , 2012

11. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10 кл. Базовый уровень: учеб. для общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2008.

12. Блюмин С.Л. Развитие понятия о числе. Некоторые современные представления. 2005.

7. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов / Н.В. Богомолов. П.И. Самойленко,-3-е изд.,стереотип.-М.:Дрофа,2005.-395,(5)с.: ил.

8. Богомолов Н.В.Практические занятия по математике: Учеб. пособие для техникумов.-3-е изд., перераб. и доп.-М. : Высш.шк.,1990.-445 с.: ил.

9. Богомолов Н.В.Сборник задач по математике: : учеб. пособие для ссузов,-2-е изд.,испр.- М.:Дрофа,2005.-204.

10. Гейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. М.: Просвещение. 1981. -239с.

11. Геометрия 10 класс. Составители Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. – Волгоград, «Учитель», 2002.

12 .Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика (пособие для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- М.; Высш. шк., 1984.-351 с.

13. Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. – М., Дрофа, 1999.

14. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии, 7 – 11 классы; Мир и семья, Санкт – Петербург,1995.

15. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика 5; учебник для общеобразовательных школ, М.: Мнемозина, 2012.

16. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. - М., 2002.

17. Лаппо Л.Д., Морозов А.В. Геометрия. Типовые вопросы и задачи – М.: «Экзамен», 2008.

18. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11. 1 ч. – М., 2012.
19. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11. 2 ч. – М., 2012.
20. Совайленко В.К. Система обучения математики в 5 – 6 классах: Кн. для учителя; Из опыта работы, М. Просвещение, 1991.
21. Энциклопедический словарь юного математика /Сост. Э-68 Савина А.П. М.: Педагогика, 1989.
22. Погорелов А. В, Геометрия для 7-11 классов, Учебник для общеобразовательных учреждений 2001 13-е изд. - М.: 2014 - 175 с.
23. Шарапова В.К. Тематические тесты по геометрии: 10-11 классы, Феникс, 2007.
24. <http://www.mgopu.ru/PVU/2.1/nummethods/Chapter1.htm>
25. <http://www.intuit.ru/department/calculate/calcmathbase/1/4.html>
26. http://www.berdov.com/docs/equation/quadratic_equations/ [электронный ресурс].
27. <http://www.sosh-13.ru/wp-content/uploads/2013/10/Метод-разработка-для-5-класса-Правила-за-курс-5-класса>

4 Приложения

Рекомендации по подготовке письменных работ

Важной частью самостоятельной работы студента является подготовка и защита рефератов, докладов, проектов, эссе, контрольных и курсовых работ.

Видами самостоятельной работы при изучении любой дисциплины являются подготовка доклада, реферата или конспекта.

9.1. Доклад – это словесное или письменное изложение сообщения на определенную тему.

Составление доклада осуществляется по следующему алгоритму:

1. Подобрать литературу по данной теме, познакомиться с её содержанием.
2. Пользуясь закладками отметить наиболее существенные места или сделать выписки.
3. Составить план доклада.
4. Написать план доклада, в заключение которого обязательно выразить своё отношение к излагаемой теме и её содержанию.

5. Прочитать текст и отредактировать его.
6. Оформить в соответствии с требованиями к оформлению письменной работы.

Примерная структура доклада:

1. Титульный лист.
2. Текст работы.
3. Список использованной литературы.

9.2. Реферат (от латинского *refero* – докладываю, сообщаю), краткое изложение в письменном виде или в форме публичного выступления содержания книги, научной работы, результатов изучения научной проблемы; доклад на определенную тему, включающий обзор соответствующих литературных и других источников. Как правило, реферат имеет научно-информационное назначение.

В процессе работы над рефератом можно выделить 4 этапа:

1. Вводный – выбор темы, работа над планом и введением.
2. Основной – работа над содержанием и заключением реферата.
3. Заключительный - оформление реферата.
4. Защита реферата (на уроке, студенческой конференции и пр.)

Структура реферата:

- Титульный лист
- Содержание: излагается название составляющих (глав, разделов) реферата, указываются страницы.

Введение: обоснование темы реферата, ее актуальность, значимость; перечисление вопросов, рассматриваемых в реферате; определение целей и задач работы; обзор источников и литературы.

Объем введения составляет 2-3 страницы.

- Основная часть: основная часть имеет название, выражающее суть реферата, может состоять из двух-трех разделов, которые тоже имеют название. В основной части глубоко и систематизировано излагается состояние изучаемого вопроса; приводятся противоречивые мнения, содержащиеся в различных источниках, которые анализируются и оцениваются с особой тщательностью.

Объем основной части составляет 8-10 страниц.

- Заключение (выводы и предложения): формулируются результаты анализа эволюции и тенденции развития рассматриваемого вопроса; даются предложения о способах решения существенных вопросов.

Объем заключения 2-3 страницы.

При изложении материала необходимо соблюдать следующие правила:

- Не рекомендуется вести повествование от первого лица единственного числа. Нужно выбирать безличные формы глагола. Например, вместо фразы «проведение мною эксперимента», лучше писать «проведенный эксперимент».

- При упоминании в тексте фамилий обязательно ставить инициалы перед фамилией.
- Цитата приводится в той форме, в которой она дана в источнике и заключается в кавычки с обеих сторон.
- Каждая глава начинается с новой страницы.

9.3. Конспект - это последовательное, связное изложение материала книги или статьи в соответствии с ее логической структурой.

Существуют два разных способа конспектирования – *непосредственное и опосредованное*.

Непосредственное конспектирование – это запись в сокращенном виде сути информации по мере ее изложения.

Опосредованное конспектирование начинают после прочтения (желательно – перечитывания) всего текста до конца, после того, как будет понятен общий смысл текста и его внутренние содержательно-логические взаимосвязи.

Основную часть конспекта составляют тезисы, но к ним добавляются и доказательства, факты и выписки, схемы и таблицы, а также заметки самого читателя по поводу прочитанного.

Если конспект состоит из одних выписок, он носит название *текстуальный конспект*. Это самый «не развивающий» вид конспекта, так как при его составлении мысль студента практически выключается из работы, и все дело сводится к механическому переписыванию текста.

Если содержание прочитанного представлено в основном в форме изложения, пересказа - это свободный конспект. Если из прочитанного в качестве основных выделяются лишь одна или несколько проблем, относящихся к теме, но не все содержание книги - *тематический конспект*.

9.4. Аннотирование книг, статей. Это предельно сжатое изложение основного содержания текста.

Аннотация строится по стандартной схеме:

- предметная рубрика (выходные данные; область знания, к которой относится труд, тема или темы труда);
- поглавная структура труда (или, то же самое, «краткое изложение оглавления»);
- подробное, поглавное перечисление основных и дополнительных вопросов и проблем, затронутых в труде.

Аннотация включает: характеристику типа произведения, основной темы проблемы, объекта), цели работы и ее результаты; указывает, что нового несёт в себе данное произведение в сравнении с другими, родственными ему по тематике и целевому назначению (при переиздании – что отличает данное издание от предыдущего). Иногда приводятся сведения об авторе (национальная принадлежность, страна, период, к которому относится творчество автора, литературный жанр), основные проблемы и темы произведения, место и время действия описываемых событий.

В аннотации указывается читательское назначение произведения печати.

9.5. Контрольная работа – одна из форм проверки и оценки усвоенных знаний, получения информации о характере познавательной деятельности, уровня самостоятельности и активности студентов в учебном процессе, эффективности методов, форм и способов учебной деятельности.

Отличительной чертой письменной контрольной работы является большая степень объективности по сравнению с устным опросом.

Для письменных контрольных работ важно, чтобы система заданий предусматривала как выявление знаний по определенной теме (разделу), так и понимание сущности изучаемых предметов и явлений, их закономерностей, умение самостоятельно делать выводы и обобщения, творчески использовать знания и умения.

При выполнении таких контрольных работ следует использовать предложенную основную литературу и подбирать дополнительные источники.

Темы контрольных работ разрабатывает преподаватель, ведущий данную дисциплину. Ответы на вопросы должны быть конкретны, логичны, соответствовать теме, содержать выводы, обобщения и показывать собственное отношение к проблеме, где это уместно.

9.6. Самостоятельная работа в Интернете

Новые информационные технологии (НИТ) могут использоваться для:

- **поиска информации в сети** – использование web-браузеров, баз данных, пользование информационно-поисковыми и информационно-справочными системами, автоматизированными библиотечными системами, электронными журналами;
- **организации диалога в сети** – использование электронной почты, синхронных и отсроченных телеконференций;
- **создания тематических web-страниц и web-квестов** – использование html-редакторов, web-браузеров, графических редакторов.

9.7. Требования к оформлению и содержанию письменной работы

Письменная работа (реферат, доклад и т.д.) должна отвечать определенным требованиям.

На Титульном листе необходимо указать следующие данные:

Кировское областное государственное образовательное
бюджетное учреждение среднего профессионального
образования
«Кировский многопрофильный техникум»

Название реферата (доклада)

Выполнил:
ФИО обучающегося, курс, группа

Руководитель:
ФИО преподаватель

20__ г.

Список использованной литературы оформляется следующим образом:

- порядковый номер в списке;
- фамилия и инициалы автора;
- название книги (для статьи её заглавие, название сборника или журнала, его номер);
- место и год выпуска.

Например:

1. **Бочаров, И. Н.** Кипренский [Текст] / Иван Бочаров, Юлия Глушакова. – 2-е изд., знач. доп. – М. : Молодая гвардия, 2013. – 390 с., 24л. ил. – (Жизнь замечательных людей: ЖЗЛ: сер. биограф.: осн. В 1890 г. Ф. Павленковым и продолж. в 1933 г. М. Горьким; вып. 1009(809). – Библиогр.: с. 385–389. – 5000 экз. – ISBN 5-235-02408-7 (в пер.).

2. **Семенов, В. В.** Философия: итог тысячелетий. Философская психология [Текст] / В. В. Семенов ; Рос. акад. наук, Пущин. науч. центр, Ин-т биофизики клетки, Акад. проблем сохранения жизни. – Пущино : ПНЦ РАН, 2014. Рез.: англ. – Библиогр.: с. 60–65. – 200 экз. – ISBN 5-201-14433-0.

При ссылке на источник в тексте приводится порядковый номер и номер страницы использованной литературы, заключенный в квадратные скобки, также возможно вынесение ссылки в нижнюю левую часть листа.

Например:

Приложение А. Структура собственности при плановой экономике [13, с. 363].

Приложение Б. Классификация потребностей в плановой экономике [13, с. 385].

Приложение В. Макроэкономические показатели стран с плановой экономикой [9 с. 233].

Литература

9. Малая Энциклопедия Стран, – Харьков: Торсинг, 2000г., 719 с.

10. Маркс К. Капитал, – М.: Государственное Издательство Политической Литературы, 1954 г. т.1 – 2.

...

Оформление работы

Письменная работа выполняется на листах А4, на одной стороне листа.

Кегль – Times New Roman, размер шрифта – 14, межстрочный интервал – 1,5.

Поля: сверху 2 см; снизу 2 см; слева 3 см; справа 1,5 см.

Абзац должен начинаться с расстояния 1 см.

Рекомендуемый объем:

Доклад - 3-5 листов формата А4;

Реферат - 10-15 листов формата А4

Все страницы работы нумеруются арабскими цифрами. Нумерация должна быть сквозной, от титульного до последнего листа текста. На титульном листе нумерация страниц не проставляется.

Иллюстрации (чертежи, графики, схемы, диаграммы и т.д.) располагаются непосредственно после текста, где они упоминаются впервые или на следующей странице. Каждая иллюстрация должна иметь название, которое приводится после слова «Рисунок» и её номера. Нумерация иллюстраций должна быть сплошной по всему тексту, например:

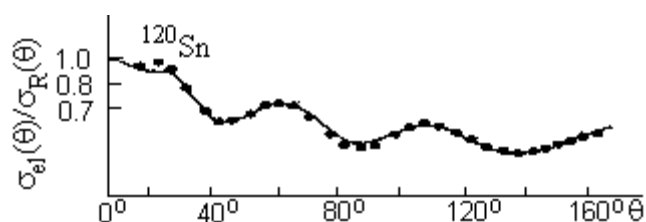


Рисунок 1 - Экспериментальные данные по упругому рассеянию протонов и результаты расчетов по оптической модели

Цифровой материал оформляется в виде таблиц, которые располагаются непосредственно после текста. Таблицы нумеруют арабскими цифрами порядковой нумерацией в пределах всей работы. Номер таблицы размещают в правом верхнем углу, над её заголовком после слова «Таблица». Заголовок таблицы помещается над таблицей посередине. Заголовки граф начинают с прописных букв, а подзаголовки со строчных. Высота букв в таблице не должна быть менее 8 мм, например:

Таблица 1

Характеристика процесса

Наименование процесса	Виды деятельности	Количество	Единица измерения	Примечание

Безусловно, при написании реферата или доклада недопустимо ограничиваться одними только учебниками или пособиями. Следует изучить

многие источники, что позволит полнее представить рассматриваемую проблему.